نظریه مطلوبیت و کاربرد آن در بیمه اتکایی

ترجمه و تلخیص: علیرضا عدالتی
کارشناس ارشد آکچوئری

چکیده

از مسایل مهم مطرح در ریاضیات کاربردی مسئله اتخاذ بهترین تصمیم است، به عنوان مثال می توان به مسئله اتخاذ بهترین تصمیم در مواجهه با یک زیان تصادفی برای فردی به خصوص اشاره کرد. در همین راستا تابع مطلوبیت برای نمایش عددی میزان نفع و رجحان تصمیم گیرنده به وجود آمد.

موضوع تحقیق در این مقاله تابع مطلوبیت و کاربرد آن در بیمه اتکایی می باشد. در ابتدا نظـــریه مطلـــوبیت را به طور مختصر مورد بررسی قرار داده و سپس کاربرد آن را در چگونگی عقد قراردادهای بیمه اتکایی بیان خواهیم کرد.دراین میان علاوه بر تعیین قرارداد بیمه اتکایی بهینه، کسر بهینه بیمه اتکایی را معرفی کرده و آن را بدست می آوریم.

مقدمه

تابع مطلوبیت به علت وجود تناقض هایی در ارزش پول در سال (۱۷۳۸) در جهت تبیین ارزش ذاتی پول توسط دانیل برنولی (Daniel Bernoulli) معرفی شد. ریاضی دانهای بزرگی مانند لاپلاس (Laplace) نیز در قرن های قبل به بحث درمورداصل برنولی پرداختند و بعضی ازکاربردهای این اصل را دربیمه آشکار کردند.

در سال ۱۸۳۲ باروآ (Barrois) با بیان نظریه ای در زمینه بیمه آتش سوزی که بر پایه اصل برنولی و کارهای لاپلاس بنا شده بود به گسترش مفهوم تابع مطلوبیت پرداخت. اما به علل مختلفی این اصل در قرن بعد به طور کامل از خاطر آمارشناسان بیمه و اقتصاد دانان به فراموشی سپرده شد. با این وجود نظریه مطلوبیت در اواسط قرن اخیر با اصل ترجیحات تصمیم گیرنده که توسط مورگنسترن (Morgenstern) ۱۹۷۴ بیان شد دوباره به مباحث اقتصادی بازگشت.

بورچ (Borch) (۱۹۷۴) نیز توانایی تابع مطلوبیت را دربیان ریاضی و حل بعضی مسائل بیمه نشان داد که منجر به بسط و گسترش تئوری مخاطره و تئوری ورشکستگی شد.علاوه بر این دوگروت (DeGroot) (۱۹۷۵) با بیان اصول موضوع در جهت تبیین رجحان‌های تصمیم‌گیرنده در میان توزیع های مختلف به بسط و گسترش نظریه مطلوبیت پرداخت.

درآمدی بر تابع مطلوبیت

واژه مطلوبیت در معنای اخص خود که در علم اقتصاد به کار می‌رود به مقدار رضایتمندی و لذتی تعبیر می شود که توسط یک فرد از کالاها و خدمات به دست می‌آید.

در واقع مطلوبیت عبارت است از ویژگی کالا که قادر است تا یک خواسته یا یک نیاز را برآورده سازد. اقتصاددانان، مطلوبیت حاصل از مصرف یک کالا را با واحد مطلوبیت (Util) می‌سنجند. در حدود یک قرن پیش اقتصاددانان به مفهوم و کاربردهای مهم نظریه مطلوبیت و مطلوبیت نهایی دست یافتند و توانستندبرای اولین‌بارمنحنی‌تقاضا وخصوصیات آن را از مفهوم مزبور استنتاج کنند. در اینجا تنها مفاهیم اساسی ای را که مبنای نظریه های فوق هستند بیان می کنیم. مصرف کننده، کالایی را بدین علت خریداری می کند که آن کالا یکی از احتیاجات وی را ارضاء می نماید یعنی، کالایی مانند سیب میزانی از نیازهای یک فرد را تامین خواهد کرد. در واقع هر فرد به علت سلایق و رجحان هایش از یک واحدکالای بخصوص مانند یک سیب مطلوبیت معینی به دست می آورد. این اصل را می توان در قالبی ریاضی نیز تبیین کرد یعنی فرض کنید مصرف کننده با مصرف q_x واحد از کالای x، مطلوبیتی به میزان $u(q_x)$ مطلوبیت به دست آورد.حال می توان فهمید که چرا افراد گوناگون با داشتن درآمد یکسان رفتارهای گوناگونی درچگونگی مصرف درآمدخود دارند.

در علـــم اقتصـاد قانونی با نام **"قانون مطلـوبیت نهایـی کاهشـی"** (Diminishing Marginal Utility) وجود دارد. با توجه به این قانون همواره اقتصاد دانان فــرض را بر این می گذارند که تابع مطلوبیت تابعی افزایشی و کاو می باشد. در واقع توابع مطلوبیت همواره دارای دو خصوصیت زیر می باشند:

۱- $u(q_x)$ تابعی افزایشی از q_x است.

۲- $u(q_x)$ تابعی کاو از q_x است.

برای مطالعات بیشتردراین زمینه‌می‌توانید به کتاب دومینیک سالواتوره و یوجین. آ. دیولیو (۱۳۷۰) ترجمه دکتر محمد ضیائی بیگدلی و نوروز علی مهدی پور مراجعه کنید.

۲- طرح کلی از نظریه مطلوبیت در بیمه

انسان در زندگی روزمره خود همواره با حوادثی روبروست که از کنترل آنها عاجز است. در واقع هر فرد در طرح ها، تصمیم ها و فعالیت های خود با مسئله عدم قطعیت مواجه است. این مسئله باعث به وجود آمدن طرح های بیمه ای شد. یعنی می توان گفت بیمه طرحی است در جهت حمایت از زیان های اقتصادی حاصل از پیشامدهای تصادفی. فردی را در نظر بگیرید که در تصمیم گیری خود با مسئله عدم قطعیت مواجه است و درصدد اتخاذ بهترین تصمیم می باشد یک راه حل برای گرفتن بهترین تصمیم استفاده از اصل مقدار مورد انتظار است.

اصل مقدار مورد انتظار

مقدار مورد انتظار (برحسب واحد پولی) حاصل از یک پیشامد تصادفی است.

فرض کنید زیان حاصل از یک پیشامد تصادفی را با $E نشان دهیم آن گاه با استفاده از این اصل فرد تصمیم گیرنده زیانی معادل با $E[X] را تصور خواهد کرد نه یک مقدار تصادفی نامعلوم $x را.حال این فرد برای خرید یک پـوشش بیمه ای کامل حاضر به پرداخت $E[X] است تا با انتقال ریسک خود به فرد، دیگر با مسئله عدم قطعیت مواجه نباشد. اما این اصل تنها به تصادفی بودن مقدار زیان $x بستگی دارد و به جنبه های دیگر مانند سطح دارایی فرد یا نتایج دیگر حاصل ازوقوع پیشامد توجهی ندارد.

با توجه به این تفاسیر رهیافت دیگری برای رفتار تصمیــم گیـــرنده ضروری به نظر می رسد. در همین راستا نظریه مطلوبیت برای تبیین رفتار تصمیم گیرنده وارد بیمه شد.

همانطور که در قسمت قبل بیان کردیم تابع مطلوبیت دارای خواص زیر است:

۱- $u(w)$ تابعی افزایشی از w است.

۲- $u(w)$ تابعی کاو از w است.

معمولاً فرض را بر این می گذارند که تابع مطلوبیت تا دوبار مشتق پذیر باشد، بنابراین خواص (۱) و (۲) بیان کننده

$$u'(x) > 0 \text{ و } u''(x) \leq 0$$

هستند.

همچنین هر تبدیل خطی مانند (w) از تابع مطلوبیت u(w) که به صورت :

(۱)

$$\tilde{u}(w) = Au(w) + B, \qquad (\forall A > 0 \ \& \ \forall B)$$

باشد نیز یک تابع مطلوبیت با همان خواص u(w) می باشد. [۱]

حال به بررسی رفتار تصمیم گیرنده در مواجهه با مسئله عدم قطعیت می پردازیم. برای این منظور فرض کنید فردی با داشتن ثروت w دارای تابع مطلوبیت u(w) می باشد. این فرد با احتمال p هیچ زیانی نخواهد دید یعنی همچنان در سطح دارایی W خواهد ماند و از طرفی با احتمال (1-p) زیانی به او وارد می شود که ثروت وی را به W_1 تقلیل می دهد. با توجه به این فرضیات، به دنبال پیدا کردن بیشترین مقدار پرداختی در جهت کسب پوشش بیمه ای کامل می باشیم. این مسئله را می توان به صورت زیر برای تصمیم‌گیرنده مورد نظر مطرح کرد.

(۲)

$$u(w-P) = (1-p)u(w_1) + pu(w)$$

که در آن P بیشترین مقدار پرداختی تصمیم گیرنده برای کسب پوشش بیمه ای کامل است. توجـه داشته باشید که سمت چپ تساوی (۲) بیانگر مطلوبیت فرد در صورت پرداخت مبلغ p و کسب پوشش بیمه ای کامل و سمت راست تساوی مقدار مورد انتظار مطلوبیت فرد در صورت قبول مخاطره و خودداری از خرید پوشش بیمه ای است. یعنی تصمیم گیرنده تفاوتی بین پرداخت مبلغ ثابت p و پذیرفتن مقدار مورد انتظار مطلوبیت قائل نمی شود.

رابطه (۲) را می توان به صورت زیر بیان کرد.

(۳)

$$u(w-P) = E[u(w-X)]$$

که در آن X متغیر تصادفی میزان زیان وارده به بیمه گذار می باشد.

البته توجــه داشته باشید که در حالت کلی تر مقدار سرمایه هر فرد یا شرکت، خود می تواند یک متغیر تصادفی باشد که آن را با W نشان می دهند.

اگر تابع مطلوبیت بیمه گر را خطی در نظر بگیریم، طبق مطالب بیان شده آنگاه کمترین مقدار حق بیمه ای که بیمه گر جهت پذیرفتن مخاطره بیمه گذار در نظر می گیرد همــــان $E[X]=\mu x$ اســــت، که در آن X نشان دهنده متغیر تصادفی مقدار زیان است. این مقدار حق بیمه را **حق بیمه خالص** (Net premium) می نامند اما بیمه گر برای پوشش هزینه ها، مالیات ها و تامیــــن مقداری جهت حصول امنیت در مقابل افزایش میزان ادعاها از مقدار پیش بینی شده، مقداری را به حق بیمه خالص اضافــــه می کند که **سربار** (loading) نامیده می شود.

حق بیمه نهایی قابل پرداخت یا همان حق بیمه سربار گذاری شده را با H نشان داده و می توان آن را به صورت زیر حساب کرد.

$H= \mu (1+\theta)+c\ ,\ \ \theta>0,\ c>0$

دراین نوع محاسبه حق بیمه سربار گذاری شده، μ^{θ} را می توان به عنوان هزینه هایی در نظر گرفت که با تغییر مقدار زیان مورد انتظار μ، در حال تغییر هستند و مخاطره حاصل از افزایش میزان خسارات از مقدار مورد انتظار را پوشش می دهند. همچنین مقدار ثابت c فراهم کننده مقـــــدار مورد انتظار هزینه هایی است که با تغییر در مقدار مورد انتظارزیان تغییرنمی‌کنند.

تاکنون تابع مطلوبیت در جهت تبیین رفتار بیمه‌گر و بیمه گذار مورد استفاده قرار گرفت و به مفهوم سود دو طرفه در قرارداد بیمه ای اشاره شد. اما تابع مطلوبیت را می توان دراکثر مراحل تصمیم گیری افراد و شرکت ها دخیل کرد.

یکی دیگر از کاربردهای تابع مطلوبیت در علم ریاضیات بیمه، استفاده آن در چگونگی عقد قراردادهای بیمه اتکایی است با استفاده از تابع مطلوبیت شرکت بیمه، می توان قرارداد بیمه اتکایی بهینه را تعیین کرد که در فصل بعد به این مبحث پرداخته خواهد شد.

تابع مطلوبیت در بیمه های اتکایی

در این بخش قرارداد اتکایی را معرفی کرده و با استفاده از نظریه مطلوبیت، بهینه ترین نوع بیمه اتکایی (reinsurance) را تعیین می کنیم این مطالب اولین بار توسط آرو(۱۹۶۳) بیان گردید.

ماهیت بیمه اتکایی

در قانون تجارت آلمان ماهیت بیمه اتکایی چنین بیان می شود (کریمی، آیت ۱۳۷۷):

بیمه اتکایی عبارت است از بیمه خطری که بیمه گر واگذارنده آنرا بیمه کرده است در واقع، بیمه اتکایی قراردادی است که بین دو شرکت بیمه ای بسته شده و به موجب آن بیمه گر اتکایی مقداری از زیانهای وارده به شرکت بیمه اول را پرداخت می کند. البته لازم به یادآوری است که هیچ گونه ارتباط قانونی بین بیمه گذار یا بیمه شده با بیمه گر اتکایی وجود ندارد . حال شرکت بیمه ای را در نظر بگیرید که می باید در پایان هر سال مجموع زیانهای S (متغیری تصادفی) وارده به بیمه گذاران را پرداخت کندمعمولا هرگاه توزیعS نشان دهنده پر مخاطره بودن مقدار پرداختی باشد، شرکتهای بیمه با عقد قرارداد اتکایی درصدد انتقال مخاطره به شرکت یا شرکتهای دیگر بر می آیند.در پایان این مقاله به بحث در مورد دو نوع قرارداد بیمه اتکایی مازاد زیان با کسر کردنی d و قرارداد بیمه اتکایی کلی، با در نظر گرفتن تابع h(x)، خواهیم پرداخت و در نهایت کسر بهینه بیمه اتکایی را با استفاده از تابع مطلوبیت پیدا می کنیم.

۱۰۳ قرارداد بیمه اتکایی بهینه

دو قرارداد بیمه اتکایی را به صورت زیر در نظر بگیرید.

الف- قرارداد مازاد زیان (Stop-Loss) با کسرکردنیd:

در این حالت بیمه اتکایی به صورت زیر زیان وارد به شرکت بیمه را در پایان هر سال پرداخت می کند.

$$(S\_d)_+ \begin{cases} S\_d & \text{اگر } S > d \\ 0 & \text{اگر } S \leqslant d \end{cases} \qquad (۴)$$

ب- قرارداد بیمه اتکایی کلی، با در نظر گرفتن تابع h(x):

در این قرارداد بیمه گر اتکایی مقدار h(S) را در پایان هر سال پرداخت خواهد کرد. توجه داشته باشید که تابع h(x) می باید در رابطه زیر صدق کند.

$$0 \le h(x) \le x.$$

همچنین لازم به ذکر است که قرارداد بیمه اتکایی مازاد زیان حالت خاصی از قرارداد بیمه اتکایی کلیبا درنظرگرفتن تابعh(x) است.

حال فرض کنید در هر دو نوع قرارداد بیمه اتکایی معرفی شده، مقادیر مورد انتظار پرداختهای بیمه گر اتکایی یکسان باشد. یعنی

(۵)

$$E\big[(S-d)_+\big] = E\big[h(S)\big].$$

علاوه بر این، برای سهولت کار فرض را بر این گذاشته که حق بیمه پرداختی جهت بدست آوردن این دو نوع بیمه اتکایی یکسان است (شاید این فرض غیر واقعی به نظر برسد)حال با استفاده ازتابع مطلوبیت می توان گفت که قرارداد مازاد زیان به قرارداد بیمه اتکایی کلی رجحان دارد. یعنی

(۶)

$$E\big[u(w-S+h(S))\big] \le E\big[u(w-S+(S-d)_+)\big].$$

در این رابطــه، w نشان دهنده دارایـــی بیمه‌گر بعد از دریافت حق‌بیمه‌ها از بیمه‌گذاران و پرداخت حق بیمه اتکایی به بیمه گر اتکایی می باشدبرای اثبات رابطه (۶) از خاصیت توابع کاو استفاده می کنیم. می دانیم که خط مماس در نقاط مختلف یک تابع کاو همواره بالای منحنی قرار دارد. یعنی

(۷) برای همه مقادیر x و y

$$u(y) \le u(x) + u'(x)(y-x),$$

حال با جایگزینی

$x = w - S + (S-d)_+$ و $y = w - S + h(S)$

خواهیم داشت:

(۸)

$$u(w-S+h(S)) \leq u(w-S+(S-d)_+)$$

$$+\, u'(w-S+(S-d)_+)(h(S)-(S-d)_+)$$

$$(w-S+(S-d)_+) + u'(w-d)(h(S)-(S-d)_+).$$

برای درک بهتر نابرابری دوم، حالت S>d و Sd⩽d را از هم جدا کنید. در حالت S>d نابرابری (۸) به راحتی بدست می آید، اما در حالت Sd⩽d می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&u'(w-S+(S-d)_+)(h(S)-(S-d)_+)\\
&= u'(w-S)h(S)\\
&\le u'(w-d)h(S)\\
&= u'(w-d)(h(S)-(S-d)_+).
\end{aligned}$$

حال با گرفتن امید ریاضی از طرفین رابطه (۸) و استفاده از (۵) می توان رابطه(۶) را اثبات کرد.

۱۰۳ کسر بهینه بیمه اتکایی

بار دیگر شرکت بیمه ای را در نظر بگیرید که در پایان سال مقدار تصادفی مجموع زیان S، را پرداخت می کند.

این شرکت قادر به خریداری پوشش بیمه اتکایی متناسب می باشد. اگر P مقدار حق بیمه یک بیمه اتکایی برای یک پوشش کامل باشد، البته فرض کنیم برای حق بیمه اتکایی φP کسر φS در پایان سال تحت پوشش بیمه اتکایی قرار گیرد.

در این صورت φ مقدار بهینه φ است هر گاه مقدار زیر را ماکسیمم کنند.

(۹)

$$E\left[u(w-\varphi P-(1-\varphi)S)\right],$$

که در آن u(x) بیانگر تابع مطلوبیت شـــرکت بوده و w نشان دهنده سرمایه اولیه می باشد که شامل حق بیمه های دریافتی از بیمه گذاران نیز می باشد.

در حالت خاص هنگامیکه u(x) را به صورت $u(x)=\frac{1}{a}(1-e^{-ax})$ در نظر بگیریم و S دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس δ^2 باشد مقدار مورد انتظار مطلوبیت به صورت صریح محاسبه می شود.

$$\frac{1}{a}\Big(1-E\left\{\exp\left[-aw+a\varphi P+a(1-\varphi)S\right]\right\}\Big)$$
$$=\frac{1}{a}\exp\left[-aw+a\varphi P+a(1-\varphi)\mu+\frac{1}{2}a^2(1-\varphi)^2\sigma^2\right]$$

این رابطه به ازای

(۱۰)

$$1-\tilde{\varphi}=\frac{P-\mu}{a\sigma^2}.$$

بیشتـــرین مقدار را خواهد داشت. این نتیجـــه را می توان به صـــورت زیر تفسیر کرد:

کســـر بهینـــه φ -1 که برای شرکت بیمه گذار نگهداشته می شود تناسبی مستقیم از سربار حق بیمه منظور شده در حق بیمه اتکایی برای خرید یک پوشش کامل اتکایی و تناسبی معکوس با مخاطره گریزی شرکت و واریانس مجموع زیانها S دارد.

توضیحات:

۱- با توجه به این مطالب می توان نتیجه گرفت که تابع مطلوبیت یکتا نیست.

واژگان کلیدی:

مطلوبیت، بیمه اتکایی، قرارداد بیمه اتکایی مازاد زیان

مراجع :

[۱]. **AASE, K.K.** "Equlibrium in a Reinsurance Syndicate; Existence, Uniqueness and Characterisation,"*ASTIN Bulletin* ۲۳:۱۸۵-۲۱, ۱۹۹۳.

[۲]. **ARROW, K.J.** "Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care, "*The American Economic Review* ۵۳:۹۴۱-۷۳, ۱۹۶۳.

[۳]. **BATON, B.,AND LEMAIRE,J.** "The Core of a Reinsurance Market," *ASTIN Bulletin* ۱۲:۵۷-۷۱, ۱۹۸۱.

[۴]. **BORCH, K.** "The Safety Loading of Reinsurance Premiums," *Skandinavisk Aktuarietidskrift* ۴۳:۱۶۳-۸۴, ۱۹۶۰.

[۵]. **BORCH, K.** *"The Mathematical Theory of Insurance"*. Lexington, Mass.: Lexington Books, ۱۹۷۴.

[۶]. **BOWERS, N., GERBER, H.U., HICKMAN, J., JONES, D., AND NESBITT, C.** *"Actuarial Mathematics"*, ۱st ed. Schaumburg, III.:Society of Actuaries, ۱۹۸۶.

[۷]. **BUHLMANN, H.** "An Economic Premium Principle," *ASTIN Bulletin* ۱۱:۵۲-۶۰, ۱۹۸۰.

[۸]. **GERBER, H., PAFUMI,** G. "Utility Function: From Risk Theory To Finance," *North American Actuarial Journal*, ۱۹۹۹.

[۹]. **GERBER, H.U.** "An Introduction to Mathematical Risk Theory," *S.S Huebner Foundation monograph*. Philadelphia, ۱۹۷۹.

[۱۰]. **GERBER, H.U.** " Chains of Rrinsurance," *Insurance: Mathematics and Economics* ۲:۴۳-۸, ۱۹۸۴.

[۱۱]. **TAYLOR, G.C.** "Risk Exchange II: Optimal Reinsurance Contracts," *Scandinavian Actuarial Journal*, ۴۰-۵۹, ۱۹۹۲b.

[۱۲]. **کریمی، آیت** (۱۳۷۷)؛ بیمه اموال و مسئولیت. تهران: دانشکده امور اقتصادی.

[۱۳]. **هندرسن، جیمز میشل** (۱۳۷۱)؛ تئوری اقتصاد خرد (تقریب ریاضی). ترجمه قره باغیان مرتضی، پژویان، جمشید . تهران: مؤسسه خدمات فرهنگی رسا.