

Paper Type: Original Article



Forecasting the Return of Government Exchange-Traded Funds based on Linear and Nonlinear Models in Machine Learning Algorithms

Meysam Kaviani* 

Department of Management and Accounting, Karaj Branch, Islamic Azad University, Karaj, Iran;
meysamkaviani@gmail.com.

Citation:



Kaviani, M. (2025). Forecasting the return of government exchange-traded funds based on linear and nonlinear models in machine learning algorithms. *Innovation management and operational strategies*, 6(1), 59-69.

Received: 28/08/2024

Reviewed: 16/10/2024

Revised: 03/11/2024

Accepted: 08/12/2024

Abstract

Purpose: Predicting the performance of government Exchange-Traded Funds (ETFs) in the Tehran Stock Exchange holds a significant position due to their importance in macroeconomic decision-making and financial markets. This study aims to develop a model for predicting the returns of these funds using advanced machine learning algorithms, such as Support Vector Machines (SVM) and Linear Regression. The primary objective is to enhance economic and investment strategies at the governmental and institutional levels through accurate return analysis of these funds.

Methodology: The study is applied in terms of purpose and descriptive-analytical in terms of methodology. Data for government ETFs in the Tehran Stock Exchange, covering the four years (2020–2023), were collected from the Tehran Stock Exchange Technology and Information Center (FIP Iran). Data analysis was conducted using two machine learning algorithms (SVM and Linear Regression) in R software. Due to the differences in asset composition, the ETFs "Palaayesh-e-Yekam" and "Daaray-e-Yekam" were selected as the primary samples.

Findings: The results indicated that SVM and Linear Regression algorithms could predict the returns of government ETFs with high accuracy. Specifically, the "Palaayesh-e-Yekam" ETF, due to its less diverse asset composition and the inefficient Tehran market, exhibited lower prediction errors. The comparison of algorithm performance showed that both methods provided satisfactory accuracy and are suitable for future forecasting in this domain.

Originality/Value: By employing advanced machine learning algorithms, this research presents a practical model for predicting the returns of government ETFs in the Tehran Stock Exchange. The findings can be utilized in economic and investment decision-making at the governmental and institutional levels.

Keywords: Forecasting, Returns, Machine learning, Exchange-traded funds.



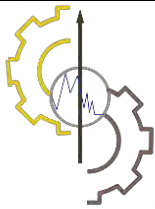
Corresponding Author: meysamkaviani@gmail.com



10.22105/imos.2025.493892.1415



Licensee. **Innovation Management & Operational Strategies**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



پیش‌بینی بازدهی صندوق‌های قابل معامله دولتی مبتنی بر مدل‌های خطی و غیرخطی در الگوریتم‌های ماشین یادگیری

میثم کاویانی*

گروه حسابداری و مدیریت، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران.

چکیده

هدف: پیش‌بینی بازدهی صندوق‌های دولتی بورس تهران به دلیل اهمیت آن‌ها در فرآیندهای تصمیم‌گیری اقتصاد کلان و بازارهای مالی کشور، از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. پژوهش حاضر با بهره‌گیری از الگوریتم‌های پیشرفته یادگیری ماشین، نظیر ماشین بردار پشتیبان (SVM) و رگرسیون خطی، مدلی برای پیش‌بینی بازدهی این صندوق‌ها ارائه می‌دهد. هدف اصلی، بهبود استراتژی‌های اقتصادی و سرمایه‌گذاری در سطح دولت و نهادهای مالی با تحلیل دقیق بازدهی این صندوق‌ها است.

روش‌شناسی پژوهش: این پژوهش از نظر هدف کاربردی و از نظر روش توصیفی-همبستگی است. داده‌های صندوق‌های دولتی بورس تهران شامل دوره زمانی چهارساله (۱۳۹۹ تا ۱۴۰۲) از پایگاه مرکز اطلاع‌رسانی و فناوری بورس تهران (فیپ ایران) استخراج شده است. تحلیل داده‌ها با استفاده از دو الگوریتم یادگیری ماشین (SVM و رگرسیون خطی) در نرم‌افزار R انجام شد. به دلیل ترکیب متفاوت دارایی‌ها، صندوق‌های پالایش یکم و دارایکم به‌عنوان نمونه‌های اصلی انتخاب شدند.

یافته‌ها: نتایج نشان داد که الگوریتم‌های SVM و رگرسیون خطی می‌توانند بازدهی صندوق‌های دولتی را با دقت بالایی پیش‌بینی کنند. به‌طور خاص، صندوق پالایش یکم به دلیل ترکیب دارایی‌های کمتر متنوع و بازار ناکارای تهران، با خطای کمتری پیش‌بینی شد. مقایسه عملکرد الگوریتم‌ها نشان داد که هر دو روش دقت مناسبی داشته و برای پیش‌بینی‌های آتی قابل استفاده هستند.

اصالت/ارزش افزوده علمی: این پژوهش با استفاده از الگوریتم‌های یادگیری ماشین، مدلی کاربردی برای پیش‌بینی بازدهی صندوق‌های دولتی بورس تهران ارائه کرده است. یافته‌های پژوهش می‌توانند در تصمیم‌گیری‌های اقتصادی و سرمایه‌گذاری در سطح دولت و سایر نهادهای مالی مورد استفاده قرار گیرند.

کلیدواژه‌ها: پیش‌بینی، بازدهی، یادگیری ماشین، صندوق.

۱- مقدمه

صندوق‌های دولتی در بورس تهران نقشی کلیدی در بازاندیشی مفهوم دولت و ترمیم نظام‌های اقتصادی در سطح خرد و کلان ایفا کرده‌اند. این ابزارهای مالی نوین، امکان سرمایه‌گذاری عمومی را فراهم کرده و درعین حال، دولت را قادر ساخته‌اند تا از ظرفیت‌های بازار سرمایه برای تامین مالی پروژه‌ها و سیاست‌های خود بهره‌برداری کند. ارتباط بین این صندوق‌ها و مفهوم دولت از جنبه‌های گوناگون قابل تحلیل است و نشان می‌دهد چگونه می‌توان از آن‌ها به‌عنوان ابزاری برای اصلاح و تقویت نظام‌های اقتصادی بهره برد. در سطح خرد، این صندوق‌ها بستری برای مشارکت مستقیم مردم و سرمایه‌گذاران در فعالیت‌های اقتصادی کشور ایجاد می‌کنند و از این طریق، زمینه‌ساز سرمایه‌گذاری عمومی می‌شوند. در سطح کلان، صندوق‌های دولتی می‌توانند به‌عنوان ابزاری برای تامین منابع مالی دولت عمل کرده و با کاهش فشار بر بودجه دولت، نقش موثری در مدیریت

اقتصادی کشور ایفا کنند [1]. بر این اساس اولین صندوق‌های قابل معامله در بورس^۱ دولتی ارایه شده در بورس تهران که ترکیبی از سهام دولت در سهم مربوط به سه بانک صادرات، تجارت و ملت و همچنین شرکت‌های بیمه البرز و بیمه اتکایی امین بود با نماد "صندوق واسطه‌گری مالی یکم" به افراد حقیقی واگذار و این مقدمه‌ای برای شناخت و استقبال عموم به سرمایه‌گذاری در ETF نیز بود. همچنین بعد از مدتی صندوق دولتی دوم تحت عنوان صندوق پالایشی با نماد پالایش از ترکیب سهام شرکت‌های پالایشی نفت اصفهان (با نماد شپنا)، تهران (با نماد شتران)، بندرعباس (شبندر) و تبریز (با نماد شبریز) معرفی شده است [2]. از طرفی با توجه به اینکه سرمایه‌گذاری در دارایی‌های مالی مستلزم پیش‌بینی بازدهی آن‌ها است، پیش‌بینی وضعیت‌های آینده همواره یکی از مسایل بنیادین و چالش‌برانگیز در تاریخ بشر بوده است. این پیش‌بینی‌ها به‌ویژه در تصمیمات سرمایه‌گذاری، استراتژی‌های بازار و تحلیل کارایی آن‌ها اهمیت دارد. در این راستا، توانایی پیش‌بینی دقیق‌تر روندهای بازار به‌ویژه در بازار سهام، همواره موضوعی قابل توجه برای فعالان این حوزه بوده است [3]، [4]. امروزه با پیشرفت‌های اخیر در حوزه یادگیری ماشین، الگوریتم‌های یادگیری ماشین به‌عنوان یکی از ابزارهای موثر در تحلیل داده‌های مالی تبدیل شده‌اند. الگوریتم‌های یادگیری ماشین با قابلیت‌های خاصی مانند شبیه‌سازی توابع غیرخطی و پردازش داده‌های نویزدار و غیر ایستا، توانسته‌اند کاربردهای گسترده‌ای در تحلیل داده‌های مالی پیدا کنند. این تکنیک‌ها نه تنها در تحلیل عملکرد صندوق‌های سرمایه‌گذاری، بلکه در پیش‌بینی قیمت دارایی‌ها و استراتژی‌های بازار نیز نقش مهمی ایفا کرده‌اند [4]. از این رو پژوهش حاضر به کاربرد استفاده از دو الگوریتم یادگیری ماشین جهت پیش‌بینی بازدهی صندوق‌های دولتی پرداخته است. از طرفی امروزه الگوریتم‌های یادگیری ماشین و هوش مصنوعی به تکامل چشمگیری دست یافته‌اند و به‌طور فزاینده‌ای در زندگی روزمره نفوذ کرده‌اند. استفاده از این تکنیک‌ها تنها به‌مرور زمان افزایش خواهد یافت و به عمق بیشتری خواهد رسید. در حوزه مالی، به‌ویژه در صندوق‌های پوشش ریسک که سعی دارند قیمت دارایی‌ها را برای ایجاد آلفا پیش‌بینی کنند، این الگوریتم‌ها نقش قابل توجهی ایفا کرده‌اند [5]. همچنین این الگوریتم‌ها توانایی پیش‌بینی بازده سهام و بسیاری از متغیرها و عوامل دیگر را دارند و این پیش‌بینی‌ها تأثیر زیادی بر تصمیمات معامله‌گران مالی خواهند داشت. با این حال، پیچیدگی‌های بازار سهام و ویژگی‌های غیرخطی آن، به‌ویژه روابط پیچیده‌ای که میان عوامل مختلف سیاسی، اقتصادی و طبیعی وجود دارد، پیش‌بینی دقیق قیمت‌ها را دشوار می‌کند [6]. فاما [7] بیان می‌کند که شواهد تجربی از این فرض حمایت می‌کند که قیمت سهام از یک گشت تصادفی پیروی می‌کند. بازارها کارا هستند، یا حداقل، به‌صورت نیمه قوی کارا هستند. تمامی اطلاعات در دسترس عموم در قیمت سهام منعکس می‌شود و سازوکار قیمت‌گذاری در پردازش مجموعه‌های اطلاعات جدید بسیار سریع و کارا است [5].

نهایتاً با وجود مطالعات گسترده در حوزه پیش‌بینی بازدهی دارایی‌های مالی، تمرکز بر صندوق‌های دولتی در بازارهای نوظهور مانند بورس تهران محدود بوده است. این در حالی است که صندوق‌هایی مانند "دارا یکم" و "پالایشی یکم" به دلیل نقش کلیدی در جذب سرمایه‌های عمومی و تأمین مالی پروژه‌های دولتی، نیازمند تحلیل‌های دقیق‌تری هستند. همچنین، مقایسه سیستماتیک مدل‌های خطی (مانند رگرسیون خطی) و غیرخطی (مانند مدل ماشین بردار پشتیبان ۲ یا SVM) در پیش‌بینی بازدهی این صندوق‌ها کمتر مورد توجه قرار گرفته است. این پژوهش با تمرکز بر این شکاف‌ها، به بررسی توانایی الگوریتم‌های یادگیری ماشین در پیش‌بینی بازدهی صندوق‌های دولتی می‌پردازد. نوآوری اصلی این تحقیق، استفاده از روش‌های پیشرفته یادگیری ماشین برای تحلیل داده‌های پیچیده و غیرخطی در بازار نوظهور ایران و ارایه راهکارهایی برای بهبود تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاری و سیاست‌گذاری‌های اقتصادی است.

۲- مبانی و پیشینه پژوهش

صندوق‌های قابل معامله در بورس و الگوریتم‌های یادگیری ماشین در پیش‌بینی بازده این صندوق‌ها، ازجمله مفاهیم مهم در تحلیل‌های مالی و اقتصادی محسوب می‌شوند. این مفاهیم و نظریه‌ها به‌طور خاص در زمینه تجزیه و تحلیل رفتار بازارهای مالی و پیش‌بینی عملکرد صندوق‌ها به‌کار می‌روند. در این بخش، ابتدا به معرفی مبانی نظری مربوط به صندوق‌های قابل معامله در بورس و سپس به کاربرد الگوریتم‌های یادگیری ماشین در پیش‌بینی بازده این صندوق‌ها پرداخته خواهد شد. به‌عنوان مثال، کاویانی و همکاران [3]، [4] در پژوهشی بر روی صندوق‌های خطرپذیر قابل معامله نشان دادند که این صندوق‌ها از سرریز بازدهی از شاخص الگو به بازدهی صندوق‌های قابل معامله برخوردارند و علاوه بر آن، نوسان بازدهی این صندوق‌ها به‌طور نامتقارن به اخبار منفی واکنش نشان می‌دهد. مطالعات شاعرعطار و میرزاپور باباجان [7] نیز به بررسی نوسانات و استراتژی‌های معاملات بازخورد در صندوق‌های زعفران پرداخت و نشان دادند که نوسان بازدهی این صندوق‌ها نسبت به اخبار مثبت و منفی متقارن است. در

¹ Exchange Traded Funds (ETFs)

ادامه، پژوهش‌های دیگر این دو محقق نشان داد که صندوق‌های قابل معامله، علی‌رغم وجود بازار با هم‌پوشانی کامل، در بیشتر موارد پایین‌تر از خالص ارزش دارایی خود معامله می‌شوند. کاویانی و فخرحسینی [7] در پژوهشی در صندوق‌های سهامی، درآمد ثابت و شاخصی، به بررسی کارایی قیمت‌گذاری و تحلیل عوامل موثر بر خطای ردیابی و صرف قیمتی پرداختند و نشان دادند که ناکارایی‌های قیمتی در این صندوق‌ها قابل توجه است. *ETFs* دولتی به دلیل حجم معاملات کم و تاخیر در انعکاس ارزش خالص دارایی، کارایی مطلوبی ندارند و این صندوق‌ها معمولاً با قیمتی پایین‌تر از *NAV* خود معامله می‌شوند. همچنین، رابطه مثبت معناداری میان حجم معاملات *ETFs* دولتی و نوسانات و همچنین رابطه منفی بین بازده و انحرافات قیمتی مشاهده شد، که این نتایج می‌تواند به‌عنوان شواهدی از ناکارایی بازار این صندوق‌ها تفسیر شود. درنهایت، کاویانی و آقایانی [2] در تحلیل پرتفوی صندوق‌های پالایشی نشان دادند که این صندوق‌ها از نظر کارایی قیمت‌گذاری و تنوع‌بخشی ناکارآمد بوده و نیاز به بازنگری در ساختار پرتفوی آن‌ها برای بهینه‌سازی ریسک و بازده دارند.

با توجه به کاربرد الگوریتم‌های یادگیری ماشین در پیش‌بینی قیمت سهام در بازار سرمایه تهران [9-11]، پژوهش‌های موجود عمدتاً بر روی قیمت سهام تمرکز دارند و هیچ‌کدام از این مطالعات به بررسی کاربرد این الگوریتم‌ها در صندوق‌های قابل معامله نپرداخته‌اند. اما در پژوهش خارج از کشور ایران پیروزان و جونیور [12] در پژوهشی با عنوان روش یادگیری ماشین برای پیش‌بینی جهت بازده صندوق قابل معامله با استفاده از مدل‌های طبقه‌بندی و رگرسیون، از نظر نتایج تحقیق، با نتایج پیش‌بینی ساده و بازده به‌دست‌آمده از تکنیک خرید و نگهداری در همان بازه زمانی مورد تجزیه و تحلیل قرار داده‌اند. از نظر ریسک و بازده، مدل‌ها بیشتر از معیارهای کنترلی با تأکید بر مدل رگرسیون خطی و مدل‌های طبقه‌بندی بر اساس رگرسیون لجستیک، ماشین بردار پشتیبان (با استفاده از مدل *LinearSVC*)، گاوسی نایو بیز و *K*-نزدیک‌ترین همسایه‌ها بهتر عمل کردند. جایی که در مجموعه داده‌های خاص بازدهی دو برابر و نسبت شارپ تا چهار برابر مدل کنترل خرید و نگهداری بیشتر است.

شیه و همکاران [13] در پژوهشی با عنوان پیش‌بینی عملکرد *ETF* بدین نتیجه رسیدند که *LSTM* و مدل سه عاملی فاما و فرنچ عملکرد برتر در پیش‌بینی بازده *ETF* از خود نشان می‌دهند. پیروزان و جونیور [12] در پژوهشی به استفاده از روش یادگیری ماشین برای پیش‌بینی بازده صندوق قابل معامله در بورس با استفاده از مدل‌های طبقه‌بندی و رگرسیون نشان دادند که از نظر ریسک و بازده، مدل‌ها بیشتر از معیارهای کنترلی با تأکید بر مدل رگرسیون خطی و مدل‌های طبقه‌بندی بر اساس رگرسیون لجستیک، ماشین بردار پشتیبان (با استفاده از مدل *LinearSVC*)، گاوسی نایو بیز و *K*-نزدیک‌ترین همسایه‌ها بهتر عمل کردند.

هارست [6] در پژوهشی با عنوان یادگیری ماشین برای پیش‌بینی قیمت صندوق قابل معامله در بورس بدین نتیجه رسیدند که یک مجموعه جهانی از *ETFs* وجود ندارد که بتوان برای دستیابی به نتایج پیش‌بینی بهتر گنجانده شود. نتایج مدل می‌تواند در زمینه‌های مختلف مانند شرکت‌های مشاوره و همچنین توسط سرمایه‌گذاران خصوصی مورد استفاده قرار گیرد. لیو و میستر [5] در پژوهشی با عنوان پیش‌بینی *ETFs* با الگوریتم‌های یادگیری ماشینی بدین نتیجه رسیدند که این الگوریتم‌ها در افق‌های یک‌ماهه تا سه‌ماهه به‌خوبی کار می‌کنند. پیش‌بینی افق کوتاه، در طول روز، بسیار دشوار است؛ بنابراین، نتایج از فرضیه گشت تصادفی کوتاه‌مدت پشتیبانی می‌کند و اهمیت حجم مقطعی و بین زمانی را به‌عنوان یک مجموعه اطلاعات قدرتمند مستند می‌کند. بولا پراگادا و همکاران [14] در پژوهشی با عنوان پیش‌بینی قیمت و تحلیل صندوق قابل معامله در بورس بدین نتیجه رسیدند که بر اساس ارزیابی یک دهه از داده‌های تاریخی گذشته، راهنمایی‌های آینده را برای قیمت *EFT* خود (*SPY*) با استفاده از تکنیک رگرسیون چندگانه ارائه شد که نتایج امیدوارکننده‌ای (با خطاهای پیش‌بینی ۱٪ در چندین معیار پیش‌بینی)، در بین تکنیک‌های مختلف ایجاد شده است.

۳- روش‌شناسی پژوهش

این پژوهش از نظر هدف، کاربردی و از نظر روش، توصیفی-همبستگی است. هدف اصلی، ارائه مدلی برای پیش‌بینی بازدهی صندوق‌های دولتی بورس تهران با استفاده از الگوریتم‌های یادگیری ماشین است تا بتوان از آن در تصمیم‌گیری‌های اقتصادی و سرمایه‌گذاری استفاده کرد. جامعه آماری این پژوهش شامل صندوق‌های دولتی قابل معامله در بورس تهران است. دو صندوق دولتی شامل صندوق پالایش یکم و صندوق دارایکم به دلیل ترکیب متفاوت دارایی‌ها و اهمیت آن‌ها در بازار سرمایه ایران به‌عنوان نمونه انتخاب شدند. داده‌های تاریخی بازدهی صندوق‌های دولتی از پایگاه مرکز اطلاع‌رسانی و فناوری بورس تهران (فیپ ایران) استخراج شد. این داده‌ها مربوط به دوره چهارساله از سال ۱۳۹۹ تا ۱۴۰۲ هستند. متغیر

^۱ SPDR S&P 500 ETF Trust یک صندوق قابل معامله در بورس است که در NYSE Arca تحت نماد SPY معامله می‌شود.

مستقل بازده بازار و متغیر وابسته، بازدهی صندوق‌های دولتی است. برای تحلیل داده‌ها از دو الگوریتم یادگیری ماشین، یعنی ماشین بردار پشتیبان (SVM) و رگرسیون خطی، استفاده شد. تحلیل داده‌ها و پیاده‌سازی مدل‌ها در محیط نرم‌افزار R انجام گرفت. مراحل تحلیل شامل پیش‌پردازش داده‌ها (پاک‌سازی داده‌ها، حذف مقادیر پرت و نرمال‌سازی)، تقسیم داده‌ها به دو بخش آموزش ۲ و آزمون ۲، آموزش مدل‌ها بر روی داده‌های آموزش، و ارزیابی عملکرد مدل‌ها با استفاده از میانگین خطای مطلق^۱، جذر میانگین مربعات خطا^۲ و ضریب تعیین (R^2) بود. نهایتاً اینکه پژوهش حاضر برای استفاده از الگوریتم‌ها برای پیش‌بینی بازده صندوق‌ها از مدل بازار که یک مدل تک متغیره به شرح ذیل است بهره گرفته است که در این مدل بازده بازار (بازده شاخص) (R_m) متغیر توضیحی بازده صندوق (R_{ETFit}) می‌باشد.

$$R_{ETFit} = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i \quad (۱)$$

۴- یافته‌های پژوهش

۴-۱- آمار توصیفی

در روش‌های توصیفی، هدف اصلی ارایه خلاصه‌ای جامع و قابل درک از داده‌های تحقیق است تا ویژگی‌های اصلی آن‌ها به‌طور شفاف توصیف شود. این کار معمولاً از طریق ارایه جداول، نمودارها و محاسبه شاخص‌های آماری توصیفی مانند شاخص‌های مرکزی و شاخص‌های پراکندگی انجام می‌گیرد. این شاخص‌ها به محقق کمک می‌کنند تا ساختار داده‌ها را به‌طور دقیق بررسی کرده و بینش بهتری از رفتار و توزیع آن‌ها به‌دست آورند. در این راستا، آمار توصیفی متغیرهای تحقیق برای دو مجموعه داده‌ی روزانه مربوط به دو صندوق، شامل ۹۰۱ و ۷۹۶ مشاهده، در جدول ۱ ارایه شده است.

جدول ۱- آمار توصیفی متغیرهای تحقیق.

Table 1- Descriptive statistics of research variables.

بازده صندوق پالایشی	بازده بازار	بازده صندوق دارا یکم	بازده صندوق پالایشی
میانگین	0.0007	0.0006	0.0005
میانه	-0.0003	0.000015	-0.0015
ماکزیمم	0.10	0.05	0.15
مینیمم	-0.09	-0.05	-0.16
انحراف معیار	0.03	0.01	0.03
چولگی	0.44	0.17	0.22
کشیدگی	4.66	4.86	5.18
مشاهدات	796	796	901

بازده شاخص صندوق پالایشی در این دوره زمانی نشان‌دهنده عملکرد نسبتاً ثابت و با تغییرات کم است. میانگین بازده این صندوق ۰/۰۶٪ بوده و انحراف معیار آن فقط ۰/۰۱٪ است که به معنای نوسانات اندک در بازده‌ها می‌باشد. توزیع داده‌ها به‌طور کلی چولگی مثبتی (۰/۱۷) دارد، به این معنی که بیشتر بازده‌ها در سمت منفی متمایل هستند. کشیدگی بالا (۴/۸۶) نیز نشان‌دهنده توزیع سنگین با احتمال وقوع نوسانات شدیدتر از حالت معمول است. به‌طور کلی، این صندوق در دوره بررسی‌شده بازدهی نوسان کمی داشته اما بیشتر بازده‌های آن در سطح پایین و منفی قرار گرفته‌اند. بازده شاخص صندوق دارا یکم با میانگین ۰/۰۵٪ نشان‌دهنده عملکرد کم‌نوسان است. انحراف معیار آن نیز ۰/۰۱٪ است که به معنای ثبات و کم بودن پراکندگی در داده‌ها می‌باشد. چولگی مثبت (۰/۱۲) این صندوق نشان‌دهنده تمایل داده‌ها به سمت بازده‌های منفی است، اما مقدار چولگی کم‌تر از صندوق پالایشی است که ممکن است به معنای نزدیک‌تر بودن توزیع به حالت نرمال باشد. کشیدگی این صندوق ۴/۳۴ است، که همچنان نشان‌دهنده احتمال وقوع نوسانات شدیدتر از حد معمول در بازده‌ها است. این صندوق در بررسی‌های انجام‌شده عملکردی ثابت و با تغییرات نسبتاً کم از نظر بازده داشته است.

¹ Mean Absolute Error (MAE)

² Root-Mean-Square Error (RMSE)

۵- همبستگی بین متغیرها

در این پژوهش، با استفاده از ضریب همبستگی پیرسون، ارتباط بین بازده‌های صندوق‌های *ETF* دولتی و شاخص بازار (شاخص کل بورس) تحلیل شده است. ضریب همبستگی پیرسون میزان و جهت رابطه خطی بین دو متغیر را اندازه‌گیری می‌کند. طبق نتایج ارائه شده، بین بازده شاخص بازار و بازده صندوق پالایشی، همبستگی مثبت و معناداری به میزان ۰/۷۵ و بین بازده شاخص بازار و بازده صندوق دارا یکم همبستگی مثبت و معناداری به میزان ۰/۶۹ مشاهده شده است. این به این معناست که هر دو صندوق، به‌ویژه صندوق پالایشی، به‌طور مستقیم تحت تأثیر نوسانات و تغییرات شاخص کل بازار قرار دارند. به عبارت دیگر، تغییرات در وضعیت کلی بازار، به میزان بیشتری بر بازده صندوق پالایشی تأثیر می‌گذارد. مقدار همبستگی بالاتر صندوق پالایشی (۰/۷۵) نسبت به صندوق دارا یکم (۰/۶۹) نشان می‌دهد که صندوق پالایشی نسبت به صندوق دارا یکم به نوسانات بازار حساس‌تر است و واکنش بیشتری به تغییرات بازار نشان می‌دهد. این موضوع می‌تواند به دلیل ماهیت ترکیب دارایی‌های صندوق پالایشی باشد، که شامل سهام شرکت‌های پالایشی است که ممکن است بیشتر تحت تأثیر تغییرات قیمت نفت و دیگر عوامل اقتصادی کلان قرار داشته باشند. در مقابل، صندوق دارا یکم ممکن است تنوع بیشتری در ترکیب دارایی‌ها داشته باشد که موجب کاهش تأثیرپذیری آن از تغییرات بازار می‌شود. این تحلیل می‌تواند به سرمایه‌گذاران کمک کند تا بسته به میزان حساسیت صندوق‌ها به نوسانات بازار، استراتژی‌های بهتری برای تخصیص سرمایه و مدیریت ریسک اتخاذ کنند.

جدول ۲- ماتریس همبستگی پیرسون برای متغیرهای کمی تحقیق.

Table 2- Pearson correlation matrix for quantitative research variables.

بازده بازار	بازده پالایشی	متغیرها	بازده بازار	بازده دارا یکم	متغیرها
1	1	بازده پالایشی	1	بازده دارا یکم	بازده دارا یکم
0.758	1	بازده بازار	0.698	بازده بازار	بازده بازار
0.000	----		0.000	----	

۶- آزمون ریشه واحد

در تحلیل‌های اقتصادی معمولاً فرض بر این است که بین متغیرهای موجود در یک مدل اقتصادی، رابطه‌ای بلندمدت و تعادلی وجود دارد. در مطالعات اقتصادسنجی کاربردی، برای برآورد این روابط بلندمدت، فرض بر این است که میانگین و واریانس متغیرها در طول زمان ثابت باقی می‌ماند و از تغییرات زمانی مستقل است. این فرض به‌طور ضمنی ثبات رفتاری متغیرها را در نظر می‌گیرد. اما در عمل، داده‌های سری زمانی اقتصادی اغلب ویژگی نامانایی دارند، که می‌تواند به مشکلات جدی در تحلیل‌ها منجر شود و موجب بروز پدیده‌ای به نام رگرسیون کاذب شود. لذا برای اطمینان از استفاده صحیح از این داده‌ها، ضروری است که آزمون‌هایی برای بررسی مانایی سری‌های زمانی صورت گیرد. در این پژوهش، برای آزمون مانایی از آزمون دیکی فولر تعمیم‌یافته (*ADF*) استفاده شده است. نتایج به‌دست‌آمده از این آزمون که در جدول ۳ ارائه شده است، نشان می‌دهند که تمامی متغیرها ریشه واحد نداشته و در نتیجه، سری‌های زمانی مانا هستند.

جدول ۳- آزمون ریشه واحد برای متغیرهای تحقیق.

Table 3- Unit root test for research variables.

متغیر	تعداد وقفه	مقدار آماره t	سطح معناداری
بازده شاخص صندوق پالایشی	2	-13.55	0.000
بازده شاخص بازار	2	-13.07	0.000
بازده شاخص صندوق دارا یکم	2	-13.80	0.000
بازده شاخص بازار	2	-17.40	0.000

۷- تحلیل پیش‌بینی بازدهی صندوق‌ها

در این پژوهش همان‌طوری که بدان اشاره شد از دو الگوریتم برای پیش‌بینی بازدهی صندوق‌های دولتی استفاده شد که نتایج به تفکیک الگوریتم‌ها به شرح ذیل ارائه شده است.

۷-۱- تخمین مدل با رگرسیون خطی

در این بخش، دو مدل با استفاده از روش حداقل مربعات معمولی (OLS) مورد آزمون قرار گرفته‌اند. برای ساخت مدل رگرسیون پیش‌بینی‌کننده، مراحل زیر به کار گرفته می‌شود:

تقسیم داده‌ها: ابتدا داده‌ها به صورت تصادفی به دو مجموعه تقسیم می‌شوند. ۷۰٪ از داده‌ها به عنوان مجموعه آموزشی برای آموزش مدل و ۳۰٪ از داده‌ها به عنوان مجموعه تست برای ارزیابی عملکرد مدل انتخاب می‌شود.

ساخت مدل رگرسیون: سپس، با استفاده از مجموعه آموزشی، مدل رگرسیون ساخته می‌شود. این مدل تلاش می‌کند تا بهترین رابطه ممکن بین متغیرهای مستقل (ورودی‌ها) و متغیر وابسته (خروجی) را پیدا کند، به طوری که خطای مدل به حداقل برسد.

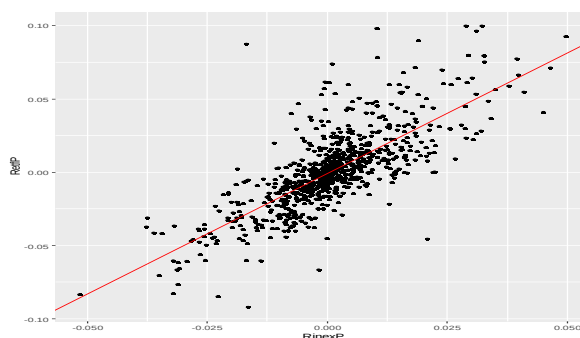
پیش‌بینی و ارزیابی مدل: در مرحله سوم، با استفاده از مجموعه تست، مدل ساخته شده برای پیش‌بینی متغیر وابسته به کار گرفته می‌شود. پس از پیش‌بینی، دقت مدل با استفاده از معیارهایی چون میانگین خطای مطلق (MAE)، جذر میانگین مربعات خطا (RMSE) و ضریب تعیین (R^2) ارزیابی می‌شود. این معیارها کمک می‌کنند تا عملکرد مدل در پیش‌بینی مقادیر واقعی مورد بررسی قرار گیرد و قابلیت پیش‌بینی آن سنجیده شود.

جدول ۴- برآورد الگوها با استفاده از رگرسیون خطی ماشین یادگیری.

Table 4- Estimation of patterns using linear regression of machine learning.

مدل‌ها	برآورد	ضرایب	انحراف معیار	t آمار	سطح معناداری
پالایشی	ضریب ثابت	-0.0001	0.01	-0.1	0.371
	بازده شاخص	1.65	0.06	27.5	0.000
	ضریب تعیین	0.579	F	770.2	0.000
دارایکم	ضریب ثابت	-6.26 E-05	8.82 E-04	-0.07	0.943
	بازده شاخص	1.63 E+00	6.24 E-02	26.03	0.000
	ضریب تعیین	0.414	F	677.8	0.000
پالایشی	RMSE	0.018		0.024	دارایکم
	R^2	0.579		0.414	
	MAE	0.013		0.015	

طبق جدول ۴، ضرایب نرخ بازدهی هر دو صندوق پالایشی و دارای یکم مثبت و معنادار هستند، به این معنی که با افزایش نرخ بازدهی بازار، نرخ بازدهی این صندوق‌ها نیز افزایش می‌یابد. آمار F برای هر دو مدل نیز نشان‌دهنده معناداری مدل‌ها است. سپس با استفاده از داده‌های تست، پیش‌بینی نرخ بازدهی صندوق‌ها انجام شد و دقت مدل‌ها با استفاده از آماره $RMSE$ ارزیابی گردید. ضریب تعیین (R^2) نیز رابطه بین مقادیر پیش‌بینی شده و مشاهدات واقعی را نشان می‌دهد. برای صندوق پالایشی، ضریب تعیین ۵۷٪ و برای صندوق دارای یکم، ۴۱٪ است که نشان می‌دهد پیش‌بینی مدل برای صندوق پالایشی دقیق‌تر بوده است. علاوه بر این، MAE که میانگین تفاوت بین مقادیر مشاهده شده و پیش‌بینی شده است، برای صندوق پالایشی کمتر بوده و به این معناست که مدل برای این صندوق عملکرد بهتری دارد. شکل ۱ نیز نشان‌دهنده رابطه خطی مناسب بین نرخ بازدهی صندوق پالایشی و نرخ شاخص بازار است که تایید می‌کند مدل به خوبی مقادیر پیش‌بینی شده را برآورد کرده است.



شکل ۱- نمودار برازش شده نرخ بازدهی پالایشی.

Figure 1 - Fitted diagram of refining efficiency rate.

همچنین در این پژوهش به نمودارهای تشخیصی مربوط به باقیمانده حاصل از تخمین هر یک از صندوق‌ها اشاره شده است طبق ضوابط ذیل پرداخته شده است.

باقیمانده‌ها در مقابل مقادیر برازش شده^۱

این نمودار نشان می‌دهد که آیا باقیمانده‌ها، الگوهای غیرخطی دارند. ممکن است یک رابطه غیرخطی بین متغیرهای پیش‌بینی کننده و متغیر وابسته وجود داشته باشد، و الگوی می‌تواند در این نمودار ظاهر شود اگر مدل رابطه غیرخطی را ثبت نکند. اگر باقیمانده‌ها به‌طور مساوی در اطراف یک خط افقی (آبی) بدون الگوهای متمایز پراکنده شده باشند، این نشانه خوبی است که الگو روابط غیرخطی ندارد. حال به نمودارهای باقیمانده از یک مدل "خوب" و یک مدل "بد" نگاه کنیم. داده‌های مدل خوب به‌گونه‌ای شبیه‌سازی می‌شوند که با فرضیه‌های رگرسیون بسیار خوب مطابقت داشته باشد، درحالی‌که داده‌های مدل بد، این‌طور نیست. در شکل ۲، نشان می‌دهد که باقیمانده‌ها از الگوی خاصی تبعیت نمی‌کنند. یعنی الگوی غیرخطی نیست.

نمودار توزیع نرمال باقیمانده‌ها^۲

این نمودار نشان می‌دهد که آیا باقیمانده‌ها به‌طور نرمال توزیع می‌شوند. آیا باقیمانده‌ها به‌خوبی از یک خط مستقیم پیروی می‌کنند یا به‌شدت انحراف دارند؟ اگر باقیمانده‌ها را بتوان بر روی خط مستقیم رسم کرد مناسب می‌باشد. در شکل ۲ تقریباً می‌توان ملاحظه کرد که این باقیمانده‌ها بر روی خط راست رسم شده است.

مقیاس-مکان^۳

این نمودار نشان می‌دهد که آیا باقیمانده‌ها به‌طور مساوی در امتداد محدوده پیش‌بینی کننده‌ها پراکنده باشند. به این ترتیب می‌توان فرض کرد همسانی واریانس وجود دارد. به عبارت دیگر اگر باقیمانده‌ها در اطراف یک خط مستقیم پراکنده شده باشند نشان‌دهنده مناسب بودن مدل است. در شکل ۲ و شکل ۴، پراکندگی باقیمانده‌ها در اطراف خط نشان‌دهنده همسانی واریانس‌ها است.

باقیمانده‌ها در مقابل اهرم^۴

این نمودار به ما کمک می‌کند تا موارد تاثیرگذار را در صورت وجود مشاهده شوند. همه داده‌های پرت^۵ در تجزیه و تحلیل رگرسیون خطی تاثیرگذار نیستند. حتی اگر داده‌ها دارای مقادیر شدید باشند، ممکن است برای تعیین یک خط رگرسیون تاثیرگذار نباشند. این یعنی نتایج خیلی متفاوت نخواهد

¹ Residuals vs fitted

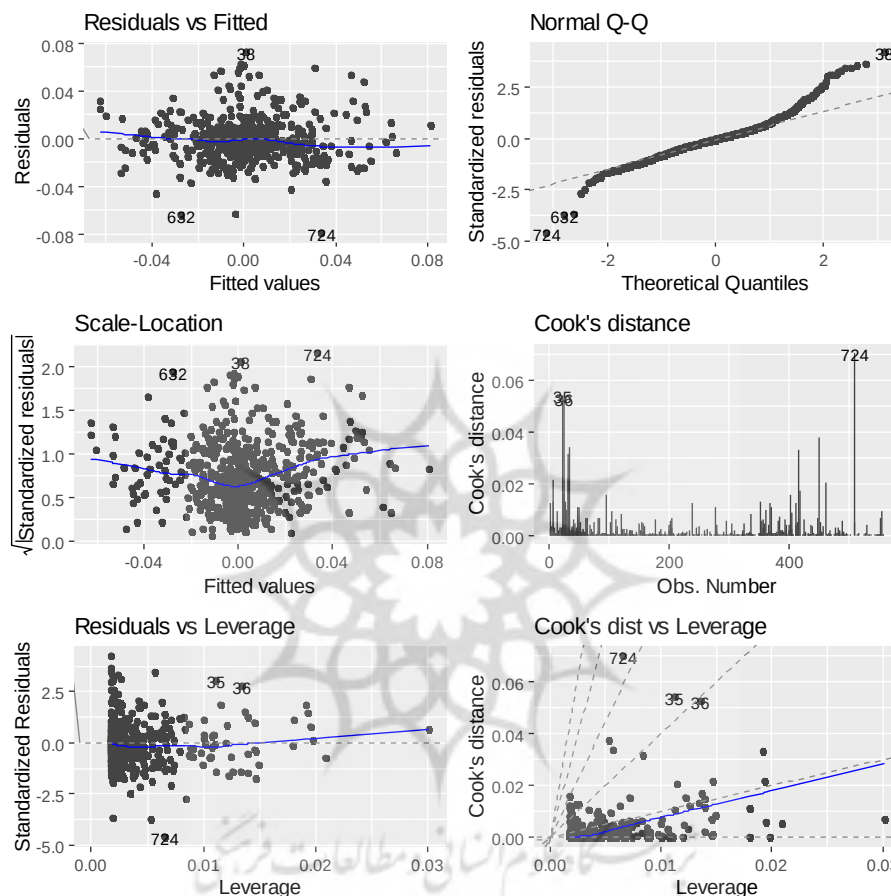
² Normal Q-Q

³ Scale-location

⁴ Residuals vs leverage

⁵ Outliers

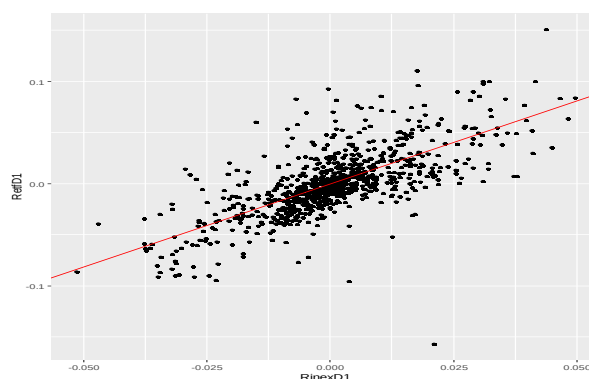
بود اگر ما آن‌ها را از تجزیه و تحلیل حذف کنیم. آن‌ها در اکثر موارد از این روند پیروی می‌کنند و به دلیل عدم تاثیرگذاری می‌توان آن‌ها را حذف نمود. از سوی دیگر، برخی موارد می‌توانند بسیار تاثیرگذار باشند حتی اگر به نظر می‌رسد در محدوده منطقی مقادیر باشند. آن‌ها می‌توانند موارد شدید علیه یک خط رگرسیون باشند و می‌توانند نتایج را تغییر دهند اگر ما آن‌ها را از تجزیه و تحلیل حذف کنیم. برخلاف نمودارهای دیگر، این الگوهای زمانی مرتبط نیستند. ما مراقب مقادیر پرت در گوشه بالا سمت راست یا گوشه پایین سمت راست هستیم. این نقاط مکان‌هایی هستند که در آن موارد می‌توانند در برابر یک خط رگرسیون تاثیرگذار باشند. هنگامی که موارد خارج از خطوط نقطه چین هستند (به این معنی که نمرات "Cook's distance" بالایی دارند)، بر نتایج رگرسیون تاثیر می‌گذارند. اگر این موارد را حذف شوند نتایج رگرسیون تغییر خواهد کرد.



شکل ۲- نمودارهای تشخیصی مدل تخمینی نرخ بازدهی پالایشی.

Figure 2- Diagnostic diagrams of the estimated refining efficiency rate model.

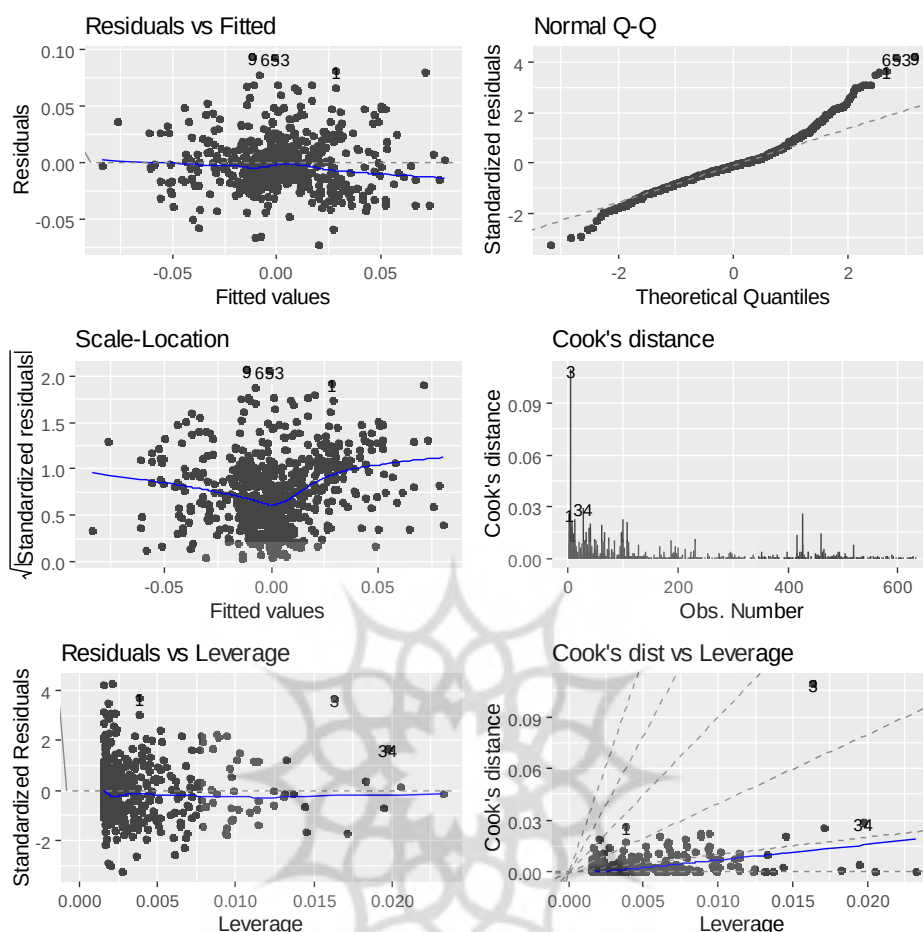
شکل ۳ رابطه خطی بین متغیر وابسته یعنی بازدهی صندوق دارایکم و متغیر توضیحی بازدهی شاخص بازار را نشان می‌دهد که نشان از برآورد مناسب مدل است.



شکل ۳- نمودار برازش شده نرخ بازدهی دارایکم.

Figure 3- Fitted graph of the low-income rate of return.

همچنین شکل ۴ همان نمودار تشخیصی مدل تخمینی نرخ بازدهی دارایی می‌باشد که در بالا توضیحات آن آورده شد. تمامی این نمودارها نشان از برازش مناسب الگو دارد.

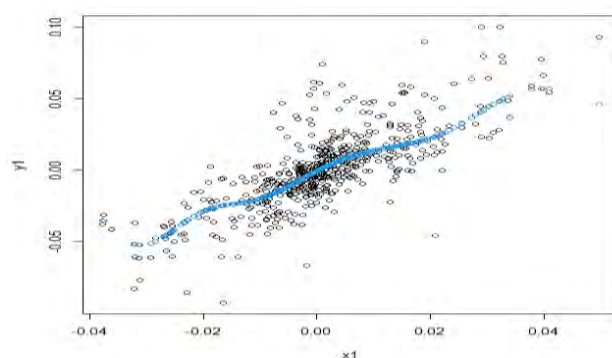


شکل ۴- نمودارهای تشخیصی مدل تخمینی نرخ بازدهی دارایی.

Figure 4- Diagnostic charts of the estimated model of low-income rate of return.

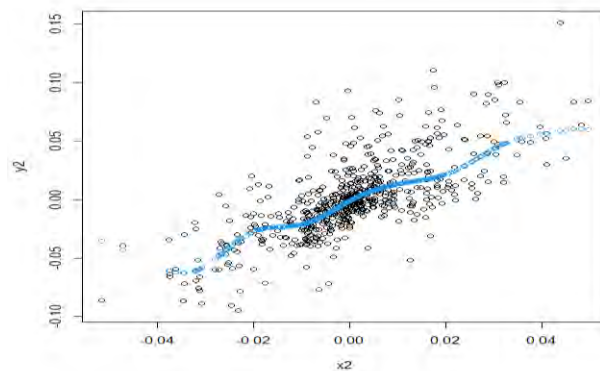
۷-۲- تخمین مدل با روش ماشین بردار پشتیبان (SVM)

در این روش با استفاده از مدل رگرسیونی به تخمین در هر دو الگو پرداخته شده است. همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود این تخمین در مقایسه با مدل رگرسیون خطی، به‌صورت غیرخطی تخمین زده شده است و می‌تواند نتیجه گرفته که تخمین مناسبی صورت پذیرفته است. لازم به ذکر است که محور افقی نرخ بازده بازار و محور عمودی نرخ بازدهی صندوق پالایشی می‌باشد.



شکل ۵- تخمین مدل با استفاده از ماشین بردار پشتیبان در صندوق پالایشی.

Figure 5- Model estimation using a support vector machine in the refinement box.



شکل ۶- تخمین مدل با استفاده از ماشین بردار پشتیبان در صندوق دارایکم.
Figure 6 - Model estimation using support vector machine in low-cost fund.

همان طور که در شکل ۶ مشاهده می شود این تخمین در مقایسه با مدل رگرسیون خطی، به صورت غیرخطی تخمین زده شده و می تواند نتیجه گرفته که تخمین مناسبی صورت پذیرفته است. لازم به ذکر است که محور افقی نرخ بازده بازار و محور عمودی نرخ بازدهی صندوق دارایکم است.

۸- مقایسه معیارهای ارزیابی در دو روش منتخب

در این قسمت ابتدا به معرفی مختصر از هر یک از روش های مختلف یادگیری ماشین و پس از آزمون هر یک از این روش ها، به مقایسه آن ها پرداخته شده است.

جدول ۵- مقایسه معیارهای ارزیابی در الگوریتم های منتخب یادگیری ماشین.

Table 5- Comparison of evaluation criteria in selected machine learning algorithms.

صندوق دارایکم			صندوق پالایشی			روش های یادگیری ماشین
MAE	ضریب تعیین	RMSE	MAE	ضریب تعیین	RMSE	
0.016	0.520	0.022	0.012	0.585	0.017	ماشین بردار پشتیبان SVNs
0.016	0.414	0.022	0.012	0.579	0.017	رگرسیون خطی

بعد از آزمون هر دو روش مختلف یادگیری ماشین، به مقایسه معیارهای ارزیابی که شامل $RMSE$ ، ضریب تعیین و MAE پرداخته شده است. همان طور که در جدول ۵ مشاهده می شود، روش ماشین بردار پشتیبان (SVM) و رگرسیون خطی از سطح یکسانی در پیش بینی بازدهی صندوق های دولتی برخوردار هستند.

۹- نتیجه گیری و پیشنهادها

در این پژوهش، توانایی الگوریتم های یادگیری ماشین، به ویژه ماشین بردار پشتیبان (SVM) و رگرسیون خطی، در پیش بینی بازدهی صندوق های دولتی بورس تهران، از جمله صندوق های پالایشی و دارایکم، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج تحلیل ها نشان داد که هر دو مدل قادر به پیش بینی بازدهی صندوق ها با دقت قابل قبولی هستند. با این حال، الگوریتم SVM با دارا بودن ضریب تعیین (R^2) بالاتر، عملکرد بهتری نسبت به رگرسیون خطی از خود نشان داد. این تفاوت بیانگر توانایی بالاتر SVM در مدل سازی روابط غیرخطی و پیچیده تر موجود در داده ها است. به عبارت دیگر، SVM به دلیل قابلیت های خود در شناسایی و شبیه سازی الگوهای پیچیده، نتایج دقیق تری را در پیش بینی بازدهی صندوق ها ارائه می دهد. مقایسه نتایج این پژوهش با مطالعات پیشین، از جمله پژوهش های پیروزان و جونور [12] در زمینه پیش بینی بازده صندوق های قابل معامله در بورس ($ETFs$) با استفاده از مدل های رگرسیون و طبقه بندی، نشان می دهد که الگوریتم های یادگیری ماشین مانند SVM و رگرسیون خطی در مقایسه با روش های سنتی، از دقت و کارایی بالاتری در پیش بینی بازدهی دارایی های مالی برخوردار هستند. همچنین، مطالعاتی همچون تحقیق هارست [6] تاکید دارند که استفاده از الگوریتم های یادگیری ماشین در پیش بینی عملکرد بازارهای مالی جهانی، به ویژه $ETFs$ ، می تواند به سرمایه گذاران و مشاوران مالی در اتخاذ تصمیمات آگاهانه تر و بهینه تر کمک کند. بر اساس یافته های این پژوهش، پیشنهاد می شود که سرمایه گذاران و تحلیلگران

مالی برای پیش‌بینی بازدهی صندوق‌های دولتی و سایر دارایی‌های مالی، از الگوریتم‌های پیشرفته‌تر یادگیری ماشین مانند SVM استفاده کنند. این الگوریتم‌ها به دلیل توانایی در مدل‌سازی روابط غیرخطی و پیچیده، قادر به ارایه پیش‌بینی‌های دقیق‌تر و قابل‌اعتمادتری هستند. علاوه بر این، با توجه به اهمیت پیش‌بینی دقیق بازدهی صندوق‌های دولتی در تصمیم‌گیری‌های اقتصادی و مالی، توصیه می‌شود که نهادهای دولتی و سیاست‌گذاران اقتصادی از این مدل‌های پیش‌بینی در ارزیابی عملکرد صندوق‌ها و سایر ابزارهای مالی دولتی بهره‌گیری کنند. این امر می‌تواند به بهبود مدیریت منابع مالی عمومی، افزایش شفافیت در تصمیم‌گیری‌ها و ارتقای عملکرد صندوق‌های دولتی منجر شود.

در نهایت، با توجه به نتایج به‌دست آمده، می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از الگوریتم‌های پیچیده‌تر یادگیری ماشین مانند SVM، به‌ویژه در مواجهه با داده‌های غیرخطی و پیچیده، می‌تواند به‌عنوان یک ابزار قدرتمند در تحلیل و پیش‌بینی بازدهی دارایی‌های مالی مورد استفاده قرار گیرد. این رویکرد نه تنها برای سرمایه‌گذاران و تحلیلگران مالی مفید است، بلکه می‌تواند به سیاست‌گذاران اقتصادی در اتخاذ تصمیمات بهینه‌تر و بهبود عملکرد صندوق‌های دولتی کمک شایانی کند.

منابع

- [1] Kaviani, M., Fakhr Hosseini, S. F. (2024). A study of pricing efficiency analysis in government exchange-traded funds (ETFs) on the Tehran Stock Exchange. *Financial economics*, 18(3), 45-61. (In Persian). <https://ensani.ir/file/download/article/1738477704-679f1088d2ea7-10512-68-3.pdf>
- [2] Kaviani, M., & Aghaee, M. S. (2023). Analysis of the econometric models of the Tehran Stock Exchange: a comparison of theory with practice. *Financial and banking strategic studies*, 1(3), 167-177. (In Persian). https://www.journal-fbs.com/article_183226.html%0Ahttps://www.journal-fbs.com/article_183226_ab44c30419e1f7916a88df1684618a9c.pdf
- [3] Kaviani, M., Fakhr Hosseini, S. F., & Dastyar, F. (2020). A review of the importance and why of predicting stock returns: with an emphasis on macroeconomic variables. *Accounting and social benefits*, 6(10), 113-131. (In Persian). https://journal.alzahra.ac.ir/article_4823.html
- [4] Kaviani, M., Guevara, M., & Nazari, Z. (2024). Analytical study of volatility and return spillovers of exchange-traded hedge funds on the Tehran Stock Exchange. *Financial and investment developments*, 1(5), 29-48. (In Persian). <https://sanad.iau.ir/Journal/afi/Article/1088552>
- [5] Chung, J., Gulcehre, C., Cho, K., & Bengio, Y. (2014). *Empirical evaluation of gated recurrent neural networks on sequence modeling*. <http://arxiv.org/abs/1412.3555>
- [6] Liew, J. K. S., & Mayster, B. (2018). Forecasting ETFs with machine learning algorithms. *The journal of alternative investments*, 20(3), 58-78. <https://doi.org/10.3905/jai.2018.20.3.058>
- [7] Horst, J. T. E. R. (2022). *Machine learning for exchange traded fund price predictions* [Thesis]. <https://essay.utwente.nl/91842/>.
- [8] Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The journal of business*, 38(1), 34-105. <https://www.jstor.org/stable/2350752>
- [9] Shaerattar, M., & Babajan, A. M. (2023). Feedback trading strategy and investors behavior in exchange traded fund in Iran. *Journal of financial management perspective*, 13(42), 91-116. <https://doi.org/10.10.48308/jfmp.2023.103951>
- [10] Sharif Far, A., Khalili Araghi, M., Raeesi Vanani, I., & Fallahshams, M. (2021). Application of deep learning architectures in stock price forecasting: A convolutional neural network approach. *Journal of asset management and financing e*, 10(3), 1-20. <https://doi.org/10.22108/amf.2022.129205.1673>
- [11] Hashmi, H., Dadashi, I., Gholamnia, H. R., & Yahyazadefard, M. (2021). Application of machine learning methods (GPR-LASOO) to predict the value of firms listed in Tehran Stock Exchange. *Empirical research in accounting*, 11(2), 71-98. (In Persian). <https://doi.org/10.22051/jera.2019.25990.2414>
- [12] Pakraei, A. R. (2017). Predicting stock price movement trends using XCS based on genetic algorithms and reinforcement learning. *Financial knowledge securities analysis (financial studies)*, 10(34), 39-54. <https://www.sid.ir/paper/200312/fa>
- [13] Piovezan, R. P. B., & Junior, P. P. D. A. (2022). *Machine learning method for return direction forecasting of Exchange Traded Funds using classification and regression models*. ArXiv Preprint ArXiv:2205.12746.
- [14] Shih, K. H., Wang, Y. H., Kao, I. C., & Lai, F. M. (2024). Forecasting ETF performance: A comparative study of deep learning models and the fama-french three-factor model. *Mathematics*, 12(19), 1-15. <https://doi.org/10.3390/math12193158>
- [15] Bollapragada, R., Savin, I., & Kerbach, L. (2013). Price forecasting and analysis of exchange traded fund. *Journal of mathematical finance*, 3(1), 181-191. <https://doi.org/10.4236/jmf.2013.31a017>