

افزایش دقت محاسبات و کاهش مقایسات زوجی مبتنی بر خوشه‌بندی معیارهای تصمیم و روش بهترین – بدترین فازی

محمد علی اقبالی*

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۴/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۵/۱۳ نوع مقاله: پژوهشی

چکیده

در برخی از موارد با توجه به ابهام ناشی از قضاوت‌های کیفی، کثرت معیارهای تصمیم و در نتیجه افزایش محاسبات، محققان بر اساس دیدگاه‌های کارفرما و با روش‌های مختلف نسبت به حذف تعدادی از معیارها اقدام می‌کنند. در صورتی که ممکن است در شرایط واقعی حذف برخی از معیارهای به ظاهر کم اهمیت، در نهایت به نتایج ضعیف در انتخاب بهترین گزینه منجر شود. این مقاله در صدد است، ضمن رفع این کاستی‌ها، یک رویکرد ترکیبی جدید برای افزایش دقت در محاسبات و کاهش مقایسات زوجی در تعیین اوزان بهینه معیارهای تصمیم ارائه کند. از این رو، ابتدا معیارهای تصمیم بر اساس تلفیق نظرات تصمیم‌گیرنده و روش آنتروپی شانون امتیازدهی و با روش K-means خوشه‌بندی می‌شود. سپس، فرایند وزندهی معیارهای هر خوشه به صورت مجزا با روش بهترین-بدترین فازی انجام می‌گیرد. به منظور اطمینان از صحت نتایج، چند مثال عددی نیز ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که رویکرد ترکیبی پیشنهادی علاوه بر جلوگیری از حذف برخی از معیارهای تصمیم، منجر به افزایش دقت در محاسبات و کاهش مقایسات زوجی بین معیارها نسبت به روش بهترین-بدترین می‌شود؛ به عبارت دیگر، نتایج این رویکرد ضمن نیاز به داده‌های مقایسه‌ای کمتر، جواب‌های قابل اطمینان‌تری را نیز در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌دهد. **واژگان کلیدی:** خوشه‌بندی معیارهای تصمیم، روش بهترین-بدترین فازی، آنتروپی شانون، نرخ‌سازگاری، تصمیم‌گیری چند معیاره.

*. عضو هیات علمی، دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی بیرجند. Eghbali@birjandut.ac.ir

مجله مهندسی سیستم و بهره‌وری، سال اول، شماره ۳، تابستان ۱۴۰۱، ص ۲۵ - ۴۸

مقدمه

امروزه گسترش مسائل مختلف کاربردی و نیاز مبرم به دانش تصمیم‌گیری، مدیران و تصمیم‌گیران سازمانی را با چالش‌های مختلفی مواجه ساخته است. یکی از این چالش‌ها که باعث سنگینی محاسبات و در نتیجه، حصول نتایج ضعیف می‌شود، کثرت معیارهای تصمیم است. در این موارد، به منظور دستیابی سریع‌تر و آسان‌تر به نتایج مورد انتظار، با نظرخواهی از تصمیم‌گیرنده در قالب مصاحبه یا پرسشنامه، تعدادی از معیارهای به ظاهر کم اهمیت حذف می‌شود. حذف این معیارها که بر اساس نظر تصمیم‌گیرنده از فرایند تصمیم‌گیری می‌شوند ممکن است در نگاه اول اقدامی صحیح به نظر آید اما با توجه به وابستگی‌ها و روابط درونی بین معیارها، ممکن است در نهایت، منجر به کسب نتایج با سطح اطمینان پایین شود.

در روش‌های تصمیم‌گیری چندشاخصه، تعدادی گزینه با توجه به تعدادی شاخص ارزیابی می‌شود. تا بهترین گزینه انتخاب شود. بر اساس روش بهترین - بدترین که از سوی دکتر جعفر رضایی در سال ۲۰۱۵ ارائه شده است (رضایی، ۲۰۱۵). بهترین و بدترین شاخص از سوی تصمیم‌گیرنده مشخص می‌شود و مقایسه زوجی بین هر یک از این دو شاخص (بهترین و بدترین) و دیگر شاخص‌ها صورت می‌گیرد، سپس یک مسئله حداکثر حداقل برای مشخص کردن وزن شاخص‌های مختلف فرموله و حل می‌شود؛ همچنین در این روش، فرمولی برای محاسبه نرخ ناسازگاری به منظور بررسی اعتبار مقایسات در نظر گرفته شده است. از جمله ویژگی‌های برجسته این روش نسبت به سایر روش‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه عبارت است از:

- به داده‌های مقایسه‌ای کمتری نیاز دارد؛
- این روش به مقایسه‌ای استوارتر منجر می‌شود، بدین معنی که جواب‌های قابل اطمینان‌تری می‌دهد.

از زمان ظهور روش بهترین - بدترین، تاکنون مقالات متعددی در جهت توسعه نظری و کاربردی مبتنی بر این روش منتشر شده است. صفرزاده و همکاران روش بهترین - بدترین را با در نظر گرفتن گروهی از تصمیم‌گیرندگان توسعه دادند. آنان علاوه بر توسعه روش مذکور در قالب تصمیم‌گیری گروهی (تیان و همکاران، ۲۰۱۸)، تحلیل حساسیت پارامترهای اصلی روش پیشنهادی را نیز مورد بررسی قرار دادند (صفرزاده و همکاران، ۲۰۱۸). حافظ‌الکتاب و همکاران نیز در مقاله خود یک رویکرد ترکیبی تصمیم‌گیری فردی و گروهی مبتنی بر روش بهترین - بدترین فازی ارائه کردند (حافظ‌الکتاب، ۲۰۱۷). جیا^۱ و همکاران نیز تصمیم‌گیری گروهی را در قالب رویکرد ترکیبی BWM-TOPSIS مورد بررسی قرار داده‌اند؛ به طوری که تعیین اوزان معیارها بر اساس روش بهترین

1. Jia

- بدترین و محاسبه وزن گزینه‌ها با روش TOPSIS انجام شده است (جیا و وانگ، ۲۰۱۶). یو^۱ و همکاران نیز تصمیم‌گیری گروهی را بر اساس رویکرد ترکیبی BWM-ELECTRE مطرح ساختند (یو و همکاران، ۲۰۱۶). محققان زیادی نیز روش بهترین - بدترین را در شرایط فازی و عدم قطعیت در مسائل تصمیم‌گیری توسعه داده‌اند. (ابوتراب و همکاران، ۲۰۱۸؛ علیمحمدلو، ۲۰۱۹) در حوزه‌های کاربردی نیز روش بهترین - بدترین مورد توجه محققان زیادی بوده است. از جمله این موارد می‌توان به استفاده از این روش در حوزه‌های حمل و نقل (گروندیک و همکاران، ۲۰۱۸؛ رضایی و همکاران، ۲۰۱۷)، اقتصادی و مالی (یدالهی و همکاران، ۲۰۱۸؛ عسکری فر و همکاران، ۲۰۱۸) و نوآوری فناوری اشاره کرد (کایتا و باروا، ۲۰۱۶). آنچه از مقالات مذکور بر می‌آید این است که محققان سعی داشته‌اند با توجه به جدید بودن BWM مسائل کاربردی دنیای واقعی را به صورت مطالعه موردی بررسی کنند. مقالات اندکی نیز در زمینه توسعه نظری این روش وجود دارد که اغلب سعی در توسعه این روش در حوزه‌های تصمیم‌گیری گروهی، شرایط فازی و رویکردهای ترکیبی با سایر روش‌های موجود از جمله TOPSIS, ELECTRE, SAW, ANP داشته و سعی کرده‌اند تا صحت و اعتبار نتایج رویکردهای پیشنهادی خود را در قالب مثال‌های کاربردی بررسی کنند.

یکی از نقاط قوت BWM نسبت به روش AHP کاهش مقایسات زوجی بین معیارهای تصمیم است؛ به طوری که تعداد مقایسات زوجی در این روش $2(n) - 3$ است که n بیانگر تعداد معیارهای تصمیم است (رضایی، ۲۰۱۵). همان‌طور که قبلاً بیان شد و نیز با توجه به پیشینه نظری تحقیق، هر کجا که محقق با انبوهی از معیارها مواجه است، به منظور کاهش محاسبات و نیز بهبود نرخ سازگاری مقایسات زوجی اقدام به حذف برخی از معیارها با نظر تصمیم‌گیرنده کرده که این امر ممکن است منجر به حذف آن دسته از معیارهایی شود که از نظر تصمیم‌گیرنده نسبت به سایر معیارها از اهمیت کمتری برخوردار است ولی در واقع، پراکندگی آنها مد نظر وی نیست. بنابراین، حذف این دسته از معیارها با نظر تصمیم‌گیرنده ممکن است نتایج نهایی را تحت تأثیر قرار دهد و از دقت آن بکاهد. از این رو، مقاله حاضر در صدد است تا در جهت رفع این نقیصه، معیارهای تصمیم را علاوه بر نظرات تصمیم‌گیرنده با معیار دیگری نیز بررسی کند؛ به طوری که معیارهای تصمیم بر اساس اخذ نظر تصمیم‌گیرنده و نیز عدم اخذ نظر از وی (روش آنتروپی شانون) امتیازدهی شده و به صورت یک نگاشت دو بعدی قابل مشاهده است. در گام بعد، معیارهای تصمیم با روش K-means خوشه‌بندی شده و معیارهای هر خوشه با استفاده از روش FBWM وزن‌دهی می‌شوند.

مزیت‌های ناشی از رویکرد ترکیبی مذکور را می‌توان در قالب نوآوری‌های مقاله حاضر به صورت زیر بیان کرد:

- در رویکرد ترکیبی پیشنهادی، امتیاز هر معیار تنها مبتنی بر نظرات تصمیم‌گیرنده نبوده بلکه معیار ثانویه دیگری (آنتروپی شانون) نیز در امتیازدهی به معیارها دخیل است. (در اینجا منظور از امتیاز معیار وزن نهایی معیار نیست)؛
- فرایند خوشه‌بندی، باعث تجمع معیارهای تصمیم در قالب معیارهای محلی شده است؛ به طوری که حداکثر تشابه از لحاظ اهمیت نسبی بین معیارها برقرار بوده و فرایند انتخاب بهترین و بدترین معیار محلی را در هر خوشه برای DM آسان‌تر می‌کند؛
- رویکرد ترکیبی پیشنهادی^۱ CC-FBWM منجر به کاهش تعداد مقایسات زوجی نسبت به روش BWM می‌شود.

ساختار کلی تحقیق به این صورت است که در بخش دوم، تعریف مسئله تحقیق مبتنی بر شکاف‌های تحقیقاتی موجود بیان می‌شود. در بخش سوم، رویکرد ترکیبی پیشنهادی تحقیق به صورت گام به گام ارائه شده است و مثال‌های عددی و کاربردی و نیز مقایسه نتایج حاصله با BWM در بخش چهارم مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. در بخش پنجم، نیز نتایج و یافته‌های تحقیق و پیشنهادات تحقیق ارائه شده است.

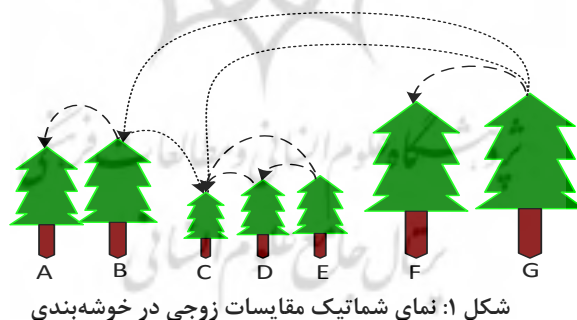
تعریف مسئله

نوآوری اصلی مقاله رضایی ارائه یک روش تصمیم‌گیری چند معیاره جدید تحت عنوان BWM است؛ به نحوی که مقایسات زوجی معیارهای تصمیم را به گونه‌ای متفاوت از سایر روش‌های MCDM انجام می‌دهد (رضایی، ۲۰۱۵). به عبارت دیگر، در این روش، تعداد مقایسات زوجی نسبت به روش تحلیل سلسله مراتبی از $\frac{n(n-1)}{2}$ به $2(n) - 3$ کاهش یافته است و میزان نرخ سازگاری مقایسات زوجی نیز نسبت به دیگر روش‌ها بهبود می‌یابد.

دلیل انتخاب بهترین (با اهمیت‌ترین) و بدترین (کم اهمیت‌ترین) معیار در BWM این است که انتخاب و مقایسه بین معیارها ساده‌تر و ضریب خطای DM کاهش یابد (رضایی، ۲۰۱۵). حال اگر تعداد معیارهای تصمیم در یک مسئله زیاد باشد؛ به طوری که DM به راحتی بتواند بهترین و بدترین معیار را از بین تمامی معیارها تشخیص دهد. از سوی دیگر، اگر سایر معیارها به گونه‌ای باشد که تعیین اهمیت نسبی بین آنها بنا به تعدد و کثرت معیارها نزدیک به هم باشد. این امر ممکن است DM را در انجام مقایسات زوجی طبق BWM با مشکل مواجه و ضریب خطای وی را در تعیین میزان

اهمیت نسبی بهترین معیار نسبت به سایر معیارها و سایر معیارها نسبت به بدترین معیار افزایش دهد. در این مقاله، با فروض مذکور (تعدد و کثرت معیارهای تصمیم و نیز نزدیک بودن اهمیت سایر معیارها غیر از بهترین و بدترین معیار) ابتدا خوشه‌بندی فازی معیارهای تصمیم بر اساس دو معیار مبتنی بر دیدگاه‌های تصمیم‌گیرنده و روش آنتروپی شانون انجام می‌گیرد. هدف از این کار، تجمیع معیارهای تصمیمی است که دارای اهمیت نزدیک به هم هستند؛ به طوری که قرار گرفتن این معیارها در یک خوشه مجزا باعث خواهد شد، تصمیم‌گیرنده بتواند با ضریب خطای کمتری این معیارها را وزن‌دهی کند. وزن‌دهی معیارها در هر خوشه با استفاده از روش بهترین-بدترین فازی^۱ انجام می‌شود. مقایسات مرجع برای تعیین ارجحیت معیارها بر اساس عبارات بیانی (متغیرهای بیانی) استوار است. برای تعیین ارجحیت و مقایسات زوجی از اعداد فازی مثلثی استفاده شده است. برای تعیین اوزان معیارها و گزینه‌ها با توجه به شرایط فازی از روش GMIR استفاده شده است.

برای فهم دقیق‌تر مسئله می‌توان به مثال تصویری شکل (۱) مراجعه کرد. ممکن است در مقایسات زوجی روش بهترین-بدترین، تعدادی از معیارها از نظر اهمیت تقریباً مشابه یکدیگر باشند که این موضوع دقت تصمیم‌گیرنده را در انجام مقایسات زوجی دچار مشکل کند. با توجه به شکل (۱) همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای مقایسه اندازه درخت‌ها می‌توان قبل از انجام مقایسه، آنها را به ۳ گروه تقسیم کرد (خوشه‌بندی). در هر خوشه عناصری با حداکثر تشابه داخلی و حداقل تشابه با سایر خوشه‌ها قرار می‌گیرند. بر این اساس، تصمیم‌گیرنده این امکان را به دست می‌آورد تا مقایسه زوجی بین معیارها را در هر خوشه با ضریب خطای کمتری انجام دهد. اینکار باعث می‌شود مقایسه همه درختان در یک خوشه با بلندترین درخت نیاز نباشد و همچنین هنگامی که از تصمیم‌گیرنده خواسته شود، دو درخت D و E را با بلندترین درخت مقایسه کند، این دو درخت را برابر لحاظ می‌کند ولی وقتی این دو درخت ابتدا در یک خوشه با یکدیگر مقایسه شوند، تفاوت آنها با یکدیگر مشخص می‌شود و افزون بر این، خطای تصمیم‌گیرنده را کاهش می‌دهد.



1. Fuzzy Best-Worst Method

۱. علائم

علائم مورد استفاده در این مقاله عبارت‌اند از:

اندیس‌ها

I: اندیس شمارشگر خوشه

پارامترها

m_i : تعداد معیارهای تصمیم در خوشه‌ی i

n: تعداد خوشه‌ها

m: تعداد کل معیارهای تصمیم

A_{Bi} : بردار ارجحیت بهترین معیار خوشه i ام نسبت به سایر معیارهای آن خوشه

۲. فرضیات

فرضیات در نظر گرفته شده در این مقاله عبارت‌اند از:

- (۱) تعداد معیارهای تصمیم به گونه‌ای است که قابلیت تفکیک در قالب حداقل دو خوشه را دارا باشند.
- (۲) اهمیت نسبی معیارهای تصمیم به جز (بهترین و بدترین معیارها) به یکدیگر نزدیک بوده به طوری که تعیین میزان اهمیت نسبی توسط تصمیم‌گیرنده ممکن است با خطا همراه باشد.
- در روش BWM تعداد کل مقایسات زوجی بین معیارهای تصمیم $2M - 3$ است ولی در رویکرد ترکیبی پیشنهادی تعداد کل مقایسات برابر با $(\sum_{i=1}^n 2mi - 3) + 2n - 3$ می‌باشد. که قسمت اول آن تعداد مقایسات طبق BWM در هر خوشه است و قسمت دوم تعداد مقایسات طبق BWM بین n خوشه است. با توجه به رابطه‌ی (۱) مشاهده می‌شود که تعداد مقایسات این روش از BWM کمتر خواهد بود:

$$\sum_{i=1}^n (2mi - 3) + 2n - 3 = 2 \sum_{i=1}^n mi - 3n + 2n - 3 = 2M - 3 - n \leq 2M - 3 \quad (۱)$$

رویکرد ترکیبی^۱ CC-FBWM

۱. اعداد فازی مثلثی^۲

در سال ۱۹۶۵ پروفیسور زاده نظریه مجموعه‌های فازی را مطرح ساخت (زاده، ۱۹۶۵). این نظریه در واقع، توسعه نظریه مجموعه کلاسیک بوده و قادر به حل مسائل مختلف دنیای واقع تحت شرایط نامطمئن و نادقیق است. یک مجموعه فازی $\tilde{a}$ عبارت است از: یک زوج مرتب (U, m) ؛ به طوری

1. Criteria Fuzzy Clustering and Fuzzy Best-Worst Method

2. Triangular fuzzy numbers

که U بیانگر مجموعه و $[0.1] \rightarrow U: m$ میزان عضویت را نشان می‌دهد. درجه عضویت را می‌توان با نماد $\mu_{\tilde{a}}(x)$ نشان داد.

تعریف ۱: عدد فازی $\tilde{a}$ را روی مجموعه اعداد حقیقی، می‌توان تحت عنوان یک عدد فازی مثلثی تعریف کرد. اگر تابع عضویت $\mu_{\tilde{a}}(x)$ آن به صورت وابسته (۲) باشد:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0 & x < l \\ \frac{x-l}{m-l} & l \leq x \leq m \\ \frac{u-x}{u-m} & m \leq x \leq u \\ 0 & x > u \end{cases} \quad (2)$$

به طوری که l بیانگر حد پایین، m حد وسط و u حد بالای $\tilde{a}$ است. یک عدد فازی مثلثی را می‌توان در قالب سه تایی (l, m, u) نشان داد. برای مطالعه بیشتر در خصوص مبحث اعداد فازی به (کارلسون و فولر، ۲۰۰۱) مراجعه شود.

تعریف ۲: $R(\tilde{a})$ بیانگر رتبه عدد فازی مثلثی است. پس از استحصال اوزان معیارها با روش بهترین - بدترین فازی، با استفاده از رابطه (۲) می‌توان اوزان فازی را به اوزان قطعی تبدیل کرد فرض کنید $\tilde{a}_i = (l_i, m_i, u_i)$ در این صورت $R(\tilde{a}_i)$ برای عدد فازی مثلثی مذکور به صورت رابطه (۳) محاسبه می‌شود:

$$R(\tilde{a}_i) = \frac{l_i + 4m_i + u_i}{6} \quad (3)$$

۲. گام‌های رویکرد پیشنهادی تحقیق CC-FBWM

معمولاً تصمیم‌گیری در خصوص دستیابی به هدفی خاص مبتنی بر n معیار مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد. مقایسه‌های زوجی روی این معیارها در حالت فازی را می‌توان با استفاده از متغیرهای (عبارت‌های) بیانی^۱ انجام داد. در این مقاله، برای انجام مقایسه‌های زوجی از متغیرهای بیانی و مقادیر تابع عضویت آنها طبق جدول (۱) استفاده شده است.

جدول ۱: عبارات بیانی و درجه عضویت آنها

عبارات بیانی	تابع عضویت
اهمیت یکسان ^۲	(1.1.1)
کمی مهم ^۳	(2/3, 1, 3/2)
مهم ^۱	(3/2, 2, 5/2)

1. linguistic variables (terms)

2. Equally importance (EI)

3. Weakly important (WI)

عبارات بیانی	تابع عضویت
خیلی مهم ^۲	(5/2, 3, 7/2)
کاملاً مهم ^۳	(7/2, 4, 9/2)

ماتریس مقایسات زوجی در حالت فازی به صورت رابطه (۴) است:

$$\tilde{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4)$$

در ماتریس فوق، $\tilde{a}_{ij}$ یک عدد فازی مثلثی است که بیانگر اهمیت نسبی فازی معیار i امنسبت به معیار j ام است. زمانی که $\tilde{a}_{ij} = (1, 1, 1)$ است به این معناست که $i = j$ برای کسب اطلاعات بیشتر در خصوص روش بهترین-بدترین به [۱] مراجعه شود.

تعریف ۳: یک مقایسه زوجی $\tilde{a}_{ij}$ تحت عنوان یک مقایسه فازی مرجع تعریف می‌شود اگر i بهترین عنصر و j بدترین عنصر باشند. برای ماتریس مقایسات زوجی در حالت فازی، $\tilde{A}$ تعداد $2(n) - 3$ مقایسه زوجی وجود دارد که از این تعداد $n - 2$ مربوط به مقایسه بهترین معیار نسبت به سایر معیارها و $n - 2$ مقایسه دیگر مربوط به مقایسه سایر معیارها نسبت به بدترین معیار بوده و $1 +$ هم مربوط به مقایسه بهترین معیار نسبت به بدترین معیار است.

در این بخش، گام‌های رویکرد ترکیبی پیشنهادی برای به دست آوردن وزن معیارها در حالت فازی همراه با جزئیات بیان می‌شود. لازم به ذکر است. برای به دست آوردن وزن گزینه‌ها در حالت فازی نیز می‌توان مطابق این رویکرد عمل کرد.

گام ۱. تعیین معیارهای تصمیم

در این مرحله، معیارهایی که برای دستیابی به یک تصمیم مورد استفاده قرار می‌گیرند مشخص می‌شود. فرض بر این است که تعداد معیارهای تصمیم n تا است. $\{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$

1. Fairly Important (FI)
2. Very important (VI)
3. Absolutely important (AI)

گام ۲. تعیین بهترین (با اهمیت‌ترین) و بدترین (کم اهمیت‌ترین) معیار
در این مرحله شخص تصمیم‌گیرنده بهترین و بدترین معیار را به صورت کلی مشخص می‌کند. منظور از بهترین (مطلوب‌ترین، مهم‌ترین) و بدترین (کم اهمیت‌ترین، ناپسندترین) است. در این مرحله هیچ مقایسه‌ای انجام نمی‌شود.

گام ۳. خوشه‌بندی معیارهای تصمیم و تعیین بهترین و بدترین معیار محلی در هر خوشه
در این مرحله، خوشه‌بندی معیارهای تصمیم بر اساس دو مؤلفه انجام می‌گیرد. مؤلفه اول، مبتنی بر نظرخواهی از تصمیم‌گیرنده و مؤلفه دوم، نیز براساس عدم دخالت تصمیم‌گیرنده؛ یعنی روش آنتروپی شانون است. امتیازی که هر معیار بر اساس این مؤلفه‌ها کسب کند، جایگاه هر معیار را در میان سایر معیار مشخص می‌کند. پس از خوشه‌بندی معیارها با روش FCM بهترین و بدترین معیارها در هر خوشه از سوی تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شود.

گام ۴. تعیین ارجحیت بهترین معیار خوشه i ام نسبت به سایر معیارهای خوشه i ام
مطابق تعریف ۳، یک مقایسه مرجع فازی شامل دو بخش است: بخش اول حالتی است که در مقایسه زوجی $\tilde{a}_{ij}$ ، بیانگر بهترین معیار است؛ به طوری که، c_i با c_B نشان داده می‌شود و این معیار با سایر معیارها مقایسه می‌شود. بخش دوم، حالتی است که $\tilde{z}$ بیانگر بدترین معیار است؛ بنابراین، c_z با c_w نشان داده می‌شود و سایر معیارها با این معیار مقایسه می‌شوند. در این گام، بخش اول، یعنی مقایسه بهترین معیار نسبت به سایر معیارها مورد بررسی قرار می‌گیرد. از این‌رو، ارجحیت بهترین معیار در خوشه i ام نسبت به سایر معیارهای آن خوشه با استفاده از مقادیر متغیرهای بیانی مندرج در جدول (۱)، مشخص می‌شود. بردار بهترین نسبت به سایرین می‌تواند به صورت رابطه (۵) باشد.

$$\tilde{A}_{Bi} = (\tilde{a}_{Bi1i}, \tilde{a}_{Bi2i}, \dots, \tilde{a}_{Bim_i}) \quad (5)$$

که در آن $\tilde{a}_{Bij_i}$ میزان برتری بهترین معیار خوشه i ام نسبت به j امین معیار خوشه i ام را نشان می‌دهد. بدیهی است که رابطه (1.1.1) $\tilde{a}_{BiBi} = 1$ برقرار است.

گام ۵. تعیین ارجحیت سایر معیارهای خوشه i ام نسبت به بدترین معیار خوشه i ام
ارجحیت سایر معیارها در خوشه i ام نسبت به بدترین معیار خوشه i ام با استفاده از مقادیر متغیرهای بیانی مندرج در جدول (۱)، مشخص می‌شود. بردار مقایسات زوجی به صورت رابطه (۶) است.

$$\tilde{A}_{wi} = (\tilde{a}_{1wi}, \tilde{a}_{2wi}, \dots, \tilde{a}_{m_iwi})^T \quad (6)$$

که در آن $\tilde{a}_{j_i w_i}$ برتری معیار j ام خوشه i ام را نسبت به بدترین معیار خوشه i ام نشان می‌دهد. بدیهی است که رابطه $(1.1.1) \tilde{a}_{w_i w_i} = 1$ برقرار است.

گام ۶. تعیین ارجحیت بهترین معیار (گام ۲) نسبت به بهترین معیارهای سایر خوشه‌ها (گام ۳) در این مرحله، ارجحیت بهترین معیار نسبت به بهترین معیارهای سایر خوشه‌ها با استفاده از مقادیر متغیرهای بیانی مندرج در جدول (۱)، توسط DM مشخص می‌شود. بردار بهترین نسبت به سایرین می‌تواند به صورت رابطه (۷) باشد.

$$\tilde{A}_B = (\tilde{a}_{BB_1}, \tilde{a}_{BB_2}, \dots, \tilde{a}_{BB_n}) \quad (7)$$

که در آن $\tilde{a}_{BB_i}$ برتری بهترین معیار نسبت به بهترین معیار خوشه i ام را نشان می‌دهد. بدیهی است که رابطه $(1.1.1) \tilde{a}_{BB} = 1$ برقرار است.

گام ۶. تعیین ارجحیت بهترین معیارهای سایر خوشه‌ها (گام ۳) نسبت به بدترین معیار (گام ۲) ارجحیت بهترین معیارهای سایر خوشه‌ها نسبت به بدترین معیار با استفاده از مقادیر متغیرهای بیانی مندرج در جدول (۱)، مشخص می‌شود. بردار مقایسه‌های زوجی به صورت رابطه (۸) است.

$$\tilde{A}_W = (\tilde{a}_{B_1 W}, \tilde{a}_{B_2 W}, \dots, \tilde{a}_{b_n W})^T \quad (8)$$

که در آن $\tilde{a}_{B_i W}$ برتری بهترین معیارهای سایر خوشه‌ها را نسبت به بدترین معیار نشان می‌دهد.

گام ۷. تعیین اوزان نهایی معیارهای تصمیم

بهینه‌ترین اوزان معیارها در حالت فازی $(\tilde{W}_1^*, \tilde{W}_2^*, \dots, \tilde{W}_n^*)$ تعیین می‌شود. وزن بهینه برای معیارها، وزنی که در آن، برای هر زوج $\frac{\tilde{W}_j}{\tilde{W}_w}$ و $\frac{\tilde{W}_b}{\tilde{W}_j}$ رابطه (۹) برقرار باشد.

$$\frac{\tilde{W}_j}{\tilde{W}_w} = \tilde{a}_{jw} \quad \text{و} \quad \frac{\tilde{W}_B}{\tilde{W}_j} = \tilde{a}_{Bj} \quad (9)$$

برای برقراری این شرایط برای تمامی j ها باید راه حلی به دست آید که در آن حداکثر تفاوت‌های مطلق یعنی $\left| \frac{\tilde{W}_B}{\tilde{W}_j} - \tilde{a}_{Bj} \right|$ و $\left| \frac{\tilde{W}_j}{\tilde{W}_w} - \tilde{a}_{jw} \right|$ برای تمامی حداقل باشد. با در نظر گرفتن منفی نبودن مقادیر و شرایط جمع اوزان فازی، مسئله ذیل در رابطه (۱۰) به دست می‌آید.

$$\min \max \left\{ \left| \frac{\tilde{W}_B}{\tilde{W}_j} - \tilde{a}_{Bj} \right|, \left| \frac{\tilde{W}_j}{\tilde{W}_w} - \tilde{a}_{jw} \right| \right\} \\ s. t$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M R(\tilde{W}_j) &= 1 & l_j^w \leq m_j^w \leq u_j^w & \quad (10) \\ l_j^w &\geq 0 \\ j &= 1.2. \dots M \end{aligned}$$

به طوری که $\tilde{W}_B = (l_B^w \cdot m_B^w \cdot u_B^w)$ و $\tilde{W}_j = (l_j^w \cdot m_j^w \cdot u_j^w)$ و $\tilde{W}_W = (l_W^w \cdot m_W^w \cdot u_W^w)$ و $\tilde{a}_{Bj} = (l_{Bj} \cdot m_{Bj} \cdot u_{Bj})$ و $\tilde{a}_{jW} = (l_{jW} \cdot m_{jW} \cdot u_{jW})$ می‌باشد. مسئله بالا می‌تواند به رابطه (۱۱) تبدیل شود.

$$\begin{aligned} \min \xi \\ s. t. \\ \left| \frac{\tilde{W}_B}{\tilde{W}_j} - \tilde{a}_{Bj} \right| &\leq \xi \\ \left| \frac{\tilde{W}_j}{\tilde{W}_W} - \tilde{a}_{jW} \right| &\leq \xi \\ \sum_{j=1}^M R(\tilde{W}_j) &= 1 & l_j^w \leq m_j^w \leq u_j^w & \quad (11) \\ l_j^w &\geq 0 \\ j &= 1.2. \dots M \end{aligned}$$

جایی که $\xi = (l^\xi \cdot m^\xi \cdot u^\xi)$ است. با توجه به اینکه، $l^\xi \leq m^\xi \leq u^\xi$ آن‌گاه، فرض می‌شود، $\xi^* = (k^* \cdot k^* \cdot k^*)$ بوده است؛ به طوری که $k^* \leq l^\xi$ با توجه به فرض مذکور رابطه (۱۱) به صورت رابطه (۱۲) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \min \xi^* \\ s. t. \\ \left| \frac{(l_B^w \cdot m_B^w \cdot u_B^w)}{(l_j^w \cdot m_j^w \cdot u_j^w)} - (l_{Bj} \cdot m_{Bj} \cdot u_{Bj}) \right| &\leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\ \left| \frac{(l_j^w \cdot m_j^w \cdot u_j^w)}{(l_W^w \cdot m_W^w \cdot u_W^w)} - (l_{jW} \cdot m_{jW} \cdot u_{jW}) \right| &\leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\ \sum_{j=1}^M R(\tilde{W}_j) &= 1 & (12) \\ l_j^w \leq m_j^w \leq u_j^w \\ l_j^w &\geq 0 \\ j &= 1.2. \dots M \end{aligned}$$

با حل مسئله فوق، اوزان بهینه معیارها در حالت فازی $(\tilde{W}_1^*, \tilde{W}_2^*, \dots, \tilde{W}_n^*)$ به دست می‌آیند.

۳. نرخ سازگاری برای FBWM

نسبت سازگاری، به عنوان یک شاخص مهم جهت ارزیابی میزان سازگاری مقایسات زوجی محسوب می‌شود.

تعریف ۴: مقایسه، زمانی به صورت کامل سازگار است که رابطه ذیل برای تمامی J ها برقرار باشد. $\tilde{a}_{BW} = \tilde{a}_{jW} * \tilde{a}_{Bj}$ که در آن $\tilde{a}_{jW}$ و $\tilde{a}_{BW}$ به ترتیب بیانگر، اهمیت فازی بهترین معیار نسبت به معیار J ، اهمیت فازی معیار J ام نسبت به بدترین معیار و اهمیت فازی بهترین معیار نسبت به بدترین معیار است.

با استفاده از شاخص سازگاری جدول (۲) و رابطه (۱۳) می‌توان مقدار نرخ سازگاری را محاسبه کرد [۹]. این نرخ سازگاری در بازه $[0, 1]$ قرار می‌گیرد. هر چه مقدار ξ^* بزرگ‌تر باشد، مقدار نسبت سازگاری بالاتر رفته و مقایسات از قابلیت اطمینان کمتری برخوردار هستند. بنابراین، هر چه این نسبت به صفر نزدیک‌تر باشد، مقایسات از سازگاری و ثبات بیشتری برخوردارند و هر چه به یک نزدیک‌تر باشد مقایسات از سازگاری و ثبات کمتری برخوردارند.

جدول ۲: محاسبه مقدار شاخص سازگاری برای روش بهترین-بدترین در شرایط فازی

متغیرهای بیانی	اهمیت یکسان	کمی مهم	مهم	خیلی مهم	کاملاً مهم
a_{BW}	(1.1.1)	(2/3.1.3/2)	(3/2.2.5/2)	(5/2.3.7/2)	(7/2.4.9/2)
شاخص سازگاری	۳,۰۰	۳,۸۰	۵,۳۹	۶,۶۹	۸,۰۴

$$(13) \quad \text{نرخ سازگاری} = \frac{\xi^*}{\text{شاخص سازگاری}}$$

مثال‌های عددی

در این بخش، کاربرد رویکرد ترکیبی پیشنهادی در قالب دو مثال عددی ارائه و نتایج حاصل از رویکرد مذکور با تحقیقات قبلی مقایسه و تحلیل شده است.

مثال ۱: در این مثال، فرض بر این است که تصمیم‌گیرنده باید بر اساس ۱۱ معیار بهترین گزینه را از بین ۴ گزینه انتخاب کند. بر اساس رویکرد پیشنهادی در این مقاله، تصمیم‌گیرنده، ابتدا معیارها را بر اساس دو مؤلفه آنتروپی شانون (با نظر غیرمستقیم) و امتیازدهی شخصی (نظر مستقیم) خوشه‌بندی و سپس با استفاده از روش بهترین-بدترین فازی وزن نهایی معیارها را محاسبه می‌کند. با توجه روند خوشه‌بندی معیارهای تصمیم، ابتدا وزن معیارها با روش آنتروپی شانون مطابق جدول (۳) محاسبه شده است.

افزایش دقت محاسبات و کاهش مقایسات زوجی مبتنی بر خوشه‌بندی معیارهای تصمیم و روش بهترین - بدترین فازی

جدول ۳: محاسبه وزن معیارها با روش آنتروپی شانون

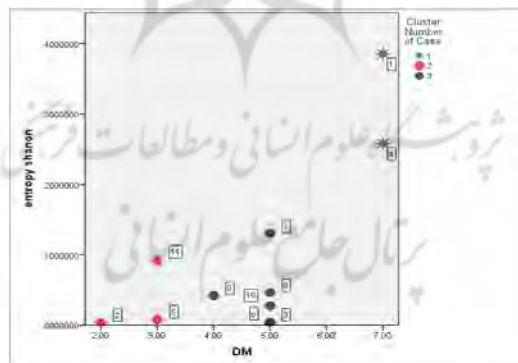
معیار گزینہ	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
A1	۷۴۰۰۰۰۰	۹۸.۴	۷۳.۱	۵۰۸۰۰	۴.۱	۹۰.۱	۲.۴	۲۰.۴	۳۹۳	۱۰.۶	۳.۵
A2	۳۳۵۰۰۰۰	۷۸.۲	۶۶.۵	۱۴۴۶۰۰	۴.۱	۸۴	۶.۴	۱۰.۱	۳۴۷	۸	۱.۸۳
A3	۱۰۸۵۰۰۰۰	۹۶	۶۱.۴	۲۵۵۰۰۰	۴	۷۵۶	۱.۱	۱۰.۴	۲۷۵	۶.۳	۷.۵۲
A4	۲۹۲۰۰	۸۶.۶	۸۲.۳	۶۵۷۰۰۰	۵۶	۸۹.۳	۴۶	۲۱.۴	۱۵۰	۱۲.۹	۳.۹۹
وزن معیار	۰.۳۸۵	۰.۰۰۳	۰.۰۰۵	۰.۲۵۸	۰.۰۰۸	۰.۰۰۲	۰.۱۳۱	۰.۰۴۷	۰.۰۴۲	۰.۰۲۸	۰.۰۹۱

همان طور که گفته شد، دومین مؤلفه خوشه‌بندی معیارها نظر مستقیم تصمیم‌گیرنده است؛ به طوری که، تصمیم‌گیرنده به هر کدام از معیارهای تصمیم امتیازی بین ۱ تا ۹ اختصاص می‌دهد که نتیجه در جدول (۴) نشان داده شده است.

جدول ۴: امتیاز معیارهای تصمیم بر اساس نظر تصمیم‌گیرنده

معیار	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
امتیاز بر اساس نظر DM	۷	۲	۵	۷	۳	۵	۵	۵	۴	۵	۳

حال، بر اساس دو مؤلفه مذکور، می‌توان خوشه‌بندی معیارها را انجام داد. به این معنی که هر معیار در یک فضای دو بعدی، که محور عمودی آن وزن معیار بر اساس آنتروپی شانون و محور افقی آن نیز بر اساس امتیازدهی مستقیم تصمیم‌گیرنده است، نگاشته می‌شود. شکل (۲) خوشه‌بندی معیارها را با استفاده از نرم افزار SPSS با روش K-means نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود، معیارها در سه خوشه تقسیم شده‌اند.



شکل ۲: خوشه بندی معیارهای تصمیم

جدول (۵) چیدمان معیارهای تصمیم را در خوشه‌ها نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود. معیارهای اول و چهارم در خوشه شماره ۱، معیارهای دوم، پنجم و یازدهم در خوشه شماره ۲ و معیارهای سوم، ششم، هفتم، هشتم، نهم و دهم در خوشه شماره ۳ قرار می‌گیرند.

جدول ۵: شماره‌گذاری معیارها براساس قرارگیری در خوشه‌ها

معیار	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
شماره خوشه	۱	۲	۳	۱	۲	۳	۳	۳	۳	۳	۲

حال کافی است، ابتدا، معیارهای هر خوشه در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار گیرد تا بهترین و بدترین معیار را در هر خوشه به طور جداگانه مشخص کند. پس از آن، مقایسات زوجی طبق روش بهترین-بدترین فازی در هر خوشه انجام می‌گیرد. پس از اینکه، تصمیم‌گیرنده در تمامی خوشه‌ها طبق روش بهترین-بدترین فازی مقایسات زوجی را انجام داد، در گام بعدی باید بهترین و بدترین معیارها را در بین کل معیارها تعیین کند. لازم به ذکر است، بهترین و بدترین معیارهای انتخابی از بین کل معیارها، پس از خوشه‌بندی ممکن است در هر یک از خوشه‌ها به طور تصادفی واقع شوند. حال از هر خوشه دیگری که بهترین و بدترین معیار از بین کل معیارها، در آنها حضور ندارد، یک معیار به عنوان نماینده خوشه انتخاب می‌شود، که بهترین (مهم ترین) معیار از هر خوشه است. در این مثال، با اخذ نظر تصمیم‌گیرنده، بهترین معیار از بین کل معیارها، معیار C1 و بدترین معیار از بین کل معیارها، معیار C2 است که این دو معیار در خوشه‌های اول و دوم قرار دارند. پس لازم است یک معیار نیز به عنوان نماینده خوشه سوم انتخاب شود که معیار C8 با نظر تصمیم‌گیرنده بهترین معیار است. حال مطابق رویکرد پیشنهادی وزن معیارها به صورت زیر محاسبه می‌شود.

در خوشه اول دو معیار C1 و C4 حضور دارند. بردار ارجحیت بهترین معیار نسبت به سایر معیارها می‌تواند به صورت رابطه (۱۴) باشد. بنابراین، مقایسه زوجی بین این دو معیار بر اساس عبارات بیانی مندرج در جدول (۱) در حالت فازی انجام می‌گیرد. نتیجه در جدول (۶) مشاهده می‌شود.

$$\tilde{A}_{B_1} = (\tilde{a}_{B_1 1_1}, \tilde{a}_{B_1 2_1}) = [(2/3, 1, 3/2), (1, 1, 1)] \quad (14)$$

جدول ۶: عبارات بیانی برای ترجیحات فازی بهترین معیار در خوشه اول به سایر معیارها

معیار	C4	C1
C1 (بهترین معیار)	WI	EI

در خوشه دوم معیارهای C2, C5 و C11 حضور دارند. معیار C2 که از نظر تصمیم‌گیرنده بدترین معیار در بین کل معیارهاست در این خوشه قرار دارد. از سوی دیگر، بهترین معیار نیز در این خوشه معیار C11 است، که از سوی تصمیم‌گیرنده انتخاب شده است. بردار ارجحیت بهترین معیار نسبت به سایر معیارها و بردار ارجحیت سایر معیارها نسبت به بدترین معیار به ترتیب به صورت روابط (۱۴) و (۱۵) می‌باشد.

$$\tilde{A}_{B_2} = (\tilde{a}_{B_2 1_2} \cdot \tilde{a}_{B_2 2_2} \cdot \tilde{a}_{B_2 3_2}) = [(5/2 \cdot 3 \cdot 7/2) \cdot (2/3 \cdot 1 \cdot 3/2) \cdot (1.1.1)] \quad (14)$$

$$\tilde{A}_{W_2} = (\tilde{a}_{1_2 W_2} \cdot \tilde{a}_{2_2 W_2} \cdot \tilde{a}_{3_2 W_2})^T = [(1.1.1) \cdot (3/2 \cdot 2 \cdot 5/2) \cdot (5/2 \cdot 3 \cdot 7/2)] \quad (15)$$

مقایسه‌های زوجی در این خوشه نیز با استفاده از روش بهترین - بدترین فازی انجام گرفته که نتایج آن در جداول (۷) و (۸) نشان داده شده است.

جدول ۷: عبارات بیانی برای ترجیحات فازی بهترین معیار در خوشه دوم به سایر معیارها

معیار	C2	C5	C11
(بهترین معیار) C11	VI	WI	EI

جدول ۸: عبارات بیانی برای ترجیحات فازی سایر معیارها نسبت به بدترین معیار در خوشه دوم

معیار	C2 (بدترین معیار)
C2	EI
C5	FI
C11	VI

در خوشه سوم معیارهای C3, C6, C7, C8, C9 و C10 حضور دارند. معیار C8 از نظر تصمیم‌گیرنده بهترین معیار و معیار C9 بدترین معیار است. بردار ارجحیت بهترین معیار نسبت به سایر معیارها و بردار ارجحیت سایر معیارها نسبت به بدترین معیار به ترتیب به صورت روابط (۱۶) و (۱۷) است.

(۱۶)

$$\tilde{A}_{B_3} = (\tilde{a}_{B_3 1_3} \cdot \tilde{a}_{B_3 2_3} \cdot \tilde{a}_{B_3 3_3} \cdot \tilde{a}_{B_3 4_3} \cdot \tilde{a}_{B_3 5_3} \cdot \tilde{a}_{B_3 6_3}) = [(3/2 \cdot 2 \cdot 5/2) \cdot (3/2 \cdot 2 \cdot 5/2) \cdot (2/3 \cdot 1 \cdot 3/2) \cdot (1.1.1) \cdot (5/2 \cdot 3 \cdot 7/2) \cdot (2/3 \cdot 1 \cdot 3/2)]$$

(۱۷)

$$\tilde{A}_{W_3} = (\tilde{a}_{1_3 W_3} \cdot \tilde{a}_{2_3 W_3} \cdot \tilde{a}_{3_3 W_3})^T = [(2/3 \cdot 1 \cdot 3/2) \cdot (3/2 \cdot 2 \cdot 5/2) \cdot (3/2 \cdot 2 \cdot 5/2) \cdot (5/2 \cdot 3 \cdot 7/2) \cdot (1.1.1) \cdot (3/2 \cdot 2 \cdot 5/2)]$$

مقایسه‌های زوجی در این خوشه نیز با استفاده از روش بهترین - بدترین فازی انجام گرفته که نتایج آن در جداول (۹) و (۱۰) نشان داده شده است.

جدول ۹: عبارات بیانی برای ترجیحات فازی بهترین معیار به سایر معیارها در خوشه سوم

معیار	C3	C6	C7	C8	C9	C10
C8 (بهترین معیار)	FI	FI	WI	EI	VI	WI

جدول ۱۰: عبارات بیانی برای ترجیحات فازی سایر معیارها نسبت به بدترین معیار در خوشه سوم

(بدترین معیار) C9	معیار
WI	C3
FI	C6
FI	C7
VI	C8
EI	C9
FI	C10

پس از انجام مقایسات زوجی در تمامی خوشه‌ها، مقایسات زوجی بین خوشه‌ها نیز باید انجام گیرد. بردار ارجحیت بهترین معیار نسبت به سایر معیارها و بردار ارجحیت سایر معیارها نسبت به بدترین معیار به ترتیب به صورت روابط (۱۸) و (۱۹) است.

$$\tilde{A}_B = (\tilde{a}_{B1}, \tilde{a}_{B2}, \tilde{a}_{B3}, \tilde{a}_{B4}) = [(7/2, 4, 9/2), (3/2, 2, 5/2), (2/3, 1, 3/2), (1, 1, 1)] \quad (18)$$

$$\tilde{A}_W = (\tilde{a}_{c2w}, \tilde{a}_{c1w}, \tilde{a}_{c8w}, \tilde{a}_{c11w})^T = [(1, 1, 1), (7/3, 4, 9/2), (2/3, 1, 3/2), (5/2, 3, 7/2)] \quad (19)$$

همان طور که قبلاً بیان شد، خوشه‌هایی که بهترین معیار در بین کل معیارها در آنها قرار نگرفته است، باید برای انجام مقایسه‌های زوجی بین خوشه‌ها یک معیار به عنوان نماینده معیارهای آن خوشه انتخاب شود. ترجیحاً این نماینده، بهترین معیار هر خوشه به انتخاب تصمیم‌گیرنده است. بنابراین، معیارهای C1, C8 و C11 به ترتیب به عنوان نماینده خوشه‌ها انتخاب می‌شوند. معیار C2 نیز قبلاً به عنوان بدترین معیار در بین کل معیار انتخاب شده است. جداول (۱۱) و (۱۲) به ترتیب بیانگر، مقایسات زوجی بین خوشه‌هاست.

جدول ۱۱: عبارات بیانی برای ترجیحات فازی بهترین معیار به سایر معیارها بین خوشه‌ها

معیار	C2	C8	C11	C1
C1 (بهترین معیار)	AI	FI	WI	EI

جدول ۱۲: عبارات بیانی برای ترجیحات فازی سایر معیارها نسبت به بدترین معیار بین خوشه‌ها

C2 (بدترین معیار)	معیار
EI	C2
AI	C1
WI	C8
VI	C11

مسئله بهینه‌سازی برای به دست آوردن وزن معیارها، به صورت رابطه (۲۰) نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}
 & \min \xi^* \\
 & s. t. \\
 & \left| \frac{(l_1^w \cdot m_1^w \cdot u_1^w)}{(l_4^w \cdot m_4^w \cdot u_4^w)} - (l_{14} \cdot m_{14} \cdot u_{14}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_1^w \cdot m_1^w \cdot u_1^w)}{(l_{11}^w \cdot m_{11}^w \cdot u_{11}^w)} - (l_{11} \cdot m_{11} \cdot u_{11}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_{11}^w \cdot m_{11}^w \cdot u_{11}^w)}{(l_2^w \cdot m_2^w \cdot u_2^w)} - (l_{112} \cdot m_{112} \cdot u_{112}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_{11}^w \cdot m_{11}^w \cdot u_{11}^w)}{(l_5^w \cdot m_5^w \cdot u_5^w)} - (l_{115} \cdot m_{115} \cdot u_{115}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_{11}^w \cdot m_{11}^w \cdot u_{11}^w)}{(l_{11}^w \cdot m_{11}^w \cdot u_{11}^w)} - (l_{1111} \cdot m_{1111} \cdot u_{1111}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_2^w \cdot m_2^w \cdot u_2^w)}{(l_2^w \cdot m_2^w \cdot u_2^w)} - (l_{22} \cdot m_{22} \cdot u_{22}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{(l_5^w \cdot m_5^w \cdot u_5^w)}{(l_2^w \cdot m_2^w \cdot u_2^w)} - (l_{52} \cdot m_{52} \cdot u_{52}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_8^w \cdot m_8^w \cdot u_8^w)}{(l_3^w \cdot m_3^w \cdot u_3^w)} - (l_{83} \cdot m_{83} \cdot u_{83}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_8^w \cdot m_8^w \cdot u_8^w)}{(l_6^w \cdot m_6^w \cdot u_6^w)} - (l_{86} \cdot m_{86} \cdot u_{86}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_8^w \cdot m_8^w \cdot u_8^w)}{(l_7^w \cdot m_7^w \cdot u_7^w)} - (l_{87} \cdot m_{87} \cdot u_{87}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \quad (۲۰) \\
 & \left| \frac{(l_8^w \cdot m_8^w \cdot u_8^w)}{(l_8^w \cdot m_8^w \cdot u_8^w)} - (l_{88} \cdot m_{88} \cdot u_{88}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_8^w \cdot m_8^w \cdot u_8^w)}{(l_9^w \cdot m_9^w \cdot u_9^w)} - (l_{89} \cdot m_{89} \cdot u_{89}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_8^w \cdot m_8^w \cdot u_8^w)}{(l_{10}^w \cdot m_{10}^w \cdot u_{10}^w)} - (l_{810} \cdot m_{810} \cdot u_{810}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_3^w \cdot m_3^w \cdot u_3^w)}{(l_9^w \cdot m_9^w \cdot u_9^w)} - (l_{39} \cdot m_{39} \cdot u_{39}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_6^w \cdot m_6^w \cdot u_6^w)}{(l_9^w \cdot m_9^w \cdot u_9^w)} - (l_{69} \cdot m_{69} \cdot u_{69}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_7^w \cdot m_7^w \cdot u_7^w)}{(l_9^w \cdot m_9^w \cdot u_9^w)} - (l_{79} \cdot m_{79} \cdot u_{79}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_8^w \cdot m_8^w \cdot u_8^w)}{(l_9^w \cdot m_9^w \cdot u_9^w)} - (l_{89} \cdot m_{89} \cdot u_{89}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_9^w \cdot m_9^w \cdot u_9^w)}{(l_9^w \cdot m_9^w \cdot u_9^w)} - (l_{99} \cdot m_{99} \cdot u_{99}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_{10}^w \cdot m_{10}^w \cdot u_{10}^w)}{(l_9^w \cdot m_9^w \cdot u_9^w)} - (l_{109} \cdot m_{109} \cdot u_{109}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\
 & \left| \frac{(l_1^w \cdot m_1^w \cdot u_1^w)}{(l_2^w \cdot m_2^w \cdot u_2^w)} - (l_{12} \cdot m_{12} \cdot u_{12}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(l_1^w \cdot m_1^w \cdot u_1^w)}{(l_8^w \cdot m_8^w \cdot u_8^w)} - (l_{18} \cdot m_{18} \cdot u_{18}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\ & \left| \frac{(l_1^w \cdot m_1^w \cdot u_1^w)}{(l_{11}^w \cdot m_{11}^w \cdot u_{11}^w)} - (l_{111} \cdot m_{111} \cdot u_{111}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\ & \left| \frac{(l_2^w \cdot m_2^w \cdot u_2^w)}{(l_2^w \cdot m_2^w \cdot u_2^w)} - (l_{22} \cdot m_{22} \cdot u_{22}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\ & \left| \frac{(l_8^w \cdot m_8^w \cdot u_8^w)}{(l_2^w \cdot m_2^w \cdot u_2^w)} - (l_{82} \cdot m_{82} \cdot u_{82}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\ & \left| \frac{(l_{11}^w \cdot m_{11}^w \cdot u_{11}^w)}{(l_2^w \cdot m_2^w \cdot u_2^w)} - (l_{112} \cdot m_{112} \cdot u_{112}) \right| \leq (k^* \cdot k^* \cdot k^*) \\ & \sum_{j=1}^M R(\tilde{W}_j) = 1 \\ & l_j^w \leq m_j^w \leq u_j^w \\ & l_j^w \geq 0 \\ & j = 1.2. \dots M \end{aligned}$$

مسئله برنامه‌ریزی با محدودیت‌های غیرخطی در حالت فازی را می‌توان به صورت رابطه (۲۱)

نوشت.

$$\begin{aligned} & \min K^* \\ & s. t. \\ & l_1 - 0.66 * u_4 \leq k * u_4; \quad l_1 - 0.66 * u_4 \geq -k * u_4; \\ & m_1 - 1 * m_4 \leq k * m_4; \quad m_1 - 1 * m_4 \geq -k * m_4; \\ & u_1 - 1.5 * l_4 \leq k * l_4; \quad u_1 - 1.5 * l_4 \geq -k * l_4; \\ & l_1 - 1 * u_1 \leq k * u_1; \quad l_1 - 1 * u_1 \geq -k * u_1; \\ & m_1 - 1 * m_1 \leq k * m_1; \quad m_1 - 1 * m_1 \geq -k * m_1; \\ & u_1 - 1 * l_1 \leq k * l_1; \quad u_1 - 1 * l_1 \geq -k * l_1; \\ & l_{11} - 2.5 * u_2 \leq k * u_2; \quad l_{11} - 2.5 * u_2 \geq -k * u_2; \\ & m_{11} - 3 * m_2 \leq k * m_2; \quad m_{11} - 3 * m_2 \geq -k * m_2; \\ & u_{11} - 3.5 * l_2 \leq k * l_2; \quad u_{11} - 3.5 * l_2 \geq -k * l_2; \\ & l_{11} - 0.66 * u_5 \leq k * u_5; \quad l_{11} - 0.66 * u_5 \geq -k * u_5; \\ & m_{11} - 1 * m_5 \leq k * m_5; \quad m_{11} - 1 * m_5 \geq -k * m_5; \\ & u_{11} - 1.5 * l_5 \leq k * l_5; \quad u_{11} - 1.5 * l_5 \geq -k * l_5; \\ & l_{11} - 1 * u_{11} \leq k * u_{11}; \quad l_{11} - 1 * u_{11} \geq -k * u_{11}; \\ & m_{11} - 1 * m_{11} \leq k * m_{11}; \quad m_{11} - 1 * m_{11} \geq -k * m_{11}; \\ & u_{11} - 1 * l_{11} \leq k * l_{11}; \quad u_{11} - 1 * l_{11} \geq -k * l_{11}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& l_2 - 1 * u_2 \leq k * u_2; \quad l_2 - 1 * u_2 \geq -k * u_2; \\
& m_2 - 1 * m_2 \leq k * m_2; \quad m_2 - 1 * m_2 \geq -k * m_2; \\
& u_2 - 1 * l_2 \leq k * l_2; \quad u_2 - 1 * l_2 \geq -k * l_2; \\
& l_5 - 1.5 * u_2 \leq k * u_2; \quad l_5 - 1.5 * u_2 \geq -k * u_2; \\
& m_5 - 2 * m_2 \leq k * m_2; \quad m_5 - 2 * m_2 \geq -k * m_2; \\
& u_5 - 2.5 * l_2 \leq k * l_2; \quad u_5 - 2.5 * l_2 \geq -k * l_2; \\
& l_8 - 1.5 * u_3 \leq k * u_3; \quad l_8 - 1.5 * u_3 \geq -k * u_3; \\
& m_8 - 2 * m_3 \leq k * m_3; \quad m_8 - 2 * m_3 \geq -k * m_3; \\
& u_8 - 2.5 * l_3 \leq k * l_3; \quad u_8 - 2.5 * l_3 \geq -k * l_3; \\
& l_8 - 1.5 * u_6 \leq k * u_6; \quad l_8 - 1.5 * u_6 \geq -k * u_6; \\
& m_8 - 2 * m_6 \leq k * m_6; \quad m_8 - 2 * m_6 \geq -k * m_6; \\
& u_8 - 2.5 * l_6 \leq k * l_6; \quad u_8 - 2.5 * l_6 \geq -k * l_6; \\
& l_8 - 0.66 * u_7 \leq k * u_7; \quad l_8 - 0.66 * u_7 \geq -k * u_7; \\
& m_8 - 1 * m_7 \leq k * m_7; \quad m_8 - 1 * m_7 \geq -k * m_7; \\
& u_8 - 1.5 * l_7 \leq k * l_7; \quad u_8 - 1.5 * l_7 \geq -k * l_7; \\
& l_8 - 1 * u_8 \leq k * u_8; \quad l_8 - 1 * u_8 \geq -k * u_8; \\
& m_8 - 1 * m_8 \leq k * m_8; \quad m_8 - 1 * m_8 \geq -k * m_8; \\
& u_8 - 1 * l_8 \leq k * l_8; \quad u_8 - 1 * l_8 \geq -k * l_8; \\
& l_8 - 2.5 * u_9 \leq k * u_9; \quad l_8 - 2.5 * u_9 \geq -k * u_9; \\
& m_8 - 3 * m_9 \leq k * m_9; \quad m_8 - 3 * m_9 \geq -k * m_9; \\
& u_8 - 3.5 * l_9 \leq k * l_9; \quad u_8 - 3.5 * l_9 \geq -k * l_9; \\
& l_8 - 0.66 * u_{10} \leq k * u_{10}; \quad l_8 - 0.66 * u_{10} \geq -k * u_{10}; \\
& m_8 - 1 * m_{10} \leq k * m_{10}; \quad m_8 - 1 * m_{10} \geq -k * m_{10}; \\
& u_8 - 1.5 * l_{10} \leq k * l_{10}; \quad u_8 - 1.5 * l_{10} \geq -k * l_{10}; \\
& l_3 - 0.66 * u_9 \leq k * u_9; \quad l_3 - 0.66 * u_9 \geq -k * u_9; \\
& m_3 - 1 * m_9 \leq k * m_9; \quad m_3 - 1 * m_9 \geq -k * m_9; \\
& u_3 - 1.5 * l_9 \leq k * l_9; \quad u_3 - 1.5 * l_9 \geq -k * l_9; \\
& l_6 - 1.5 * u_9 \leq k * u_9; \quad l_6 - 1.5 * u_9 \geq -k * u_9; \\
& m_6 - 2 * m_9 \leq k * m_9; \quad m_6 - 2 * m_9 \geq -k * m_9; \\
& u_6 - 2.5 * l_9 \leq k * l_9; \quad u_6 - 2.5 * l_9 \geq -k * l_9; \\
& l_7 - 1.5 * u_9 \leq k * u_9; \quad l_7 - 1.5 * u_9 \geq -k * u_9; \\
& m_7 - 2 * m_9 \leq k * m_9; \quad m_7 - 2 * m_9 \geq -k * m_9; \\
& u_7 - 2.5 * l_9 \leq k * l_9; \quad u_7 - 2.5 * l_9 \geq -k * l_9; \\
& l_8 - 2.5 * u_9 \leq k * u_9; \quad l_8 - 2.5 * u_9 \geq -k * u_9; \\
& m_8 - 3 * m_9 \leq k * m_9; \quad m_8 - 3 * m_9 \geq -k * m_9; \\
& u_8 - 3.5 * l_9 \leq k * l_9; \quad u_8 - 3.5 * l_9 \geq -k * l_9; \\
& l_9 - 1 * u_9 \leq k * u_9; \quad l_9 - 1 * u_9 \geq -k * u_9; \\
& m_9 - 1 * m_9 \leq k * m_9; \quad m_9 - 1 * m_9 \geq -k * m_9; \\
& u_9 - 1 * l_9 \leq k * l_9; \quad u_9 - 1 * l_9 \geq -k * l_9; \\
& l_{10} - 1.5 * u_9 \leq k * u_9; \quad l_{10} - 1.5 * u_9 \geq -k * u_9; \\
& m_{10} - 2 * m_9 \leq k * m_9; \quad m_{10} - 2 * m_9 \geq -k * m_9;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &u_{10} - 2.5 * l_9 \leq k * l_9; \quad u_{10} - 2.5 * l_9 \geq -k * l_9; \\
 &l_1 - 3.5 * u_2 \leq k * u_2; \quad l_1 - 3.5 * u_2 \geq -k * u_2; \\
 &m_1 - 4 * m_2 \leq k * m_2; \quad m_1 - 4 * m_2 \geq -k * m_2; \\
 &u_1 - 4.5 * l_2 \leq k * l_2; \quad u_1 - 4.5 * l_2 \geq -k * l_2; \\
 &l_1 - 1.5 * u_8 \leq k * u_8; \quad l_1 - 1.5 * u_8 \geq -k * u_8; \\
 &m_1 - 2 * m_8 \leq k * m_8; \quad m_1 - 2 * m_8 \geq -k * m_8; \\
 &u_1 - 2.5 * l_8 \leq k * l_8; \quad u_1 - 2.5 * l_8 \geq -k * l_8; \\
 &l_1 - 0.66 * u_{11} \leq k * u_{11}; \quad l_1 - 0.66 * u_{11} \geq -k * u_{11}; \\
 &m_1 - 1 * m_{11} \leq k * m_{11}; \quad m_1 - 1 * m_{11} \geq -k * m_{11}; \\
 &u_1 - 1.5 * l_{11} \leq k * l_{11}; \quad u_1 - 1.5 * l_{11} \geq -k * l_{11}; \\
 &l_2 - 1 * u_2 \leq k * u_2; \quad l_2 - 1 * u_2 \geq -k * u_2; \\
 &m_2 - 1 * m_2 \leq k * m_2; \quad m_2 - 1 * m_2 \geq -k * m_2; \\
 &u_2 - 1 * l_2 \leq k * l_2; \quad u_2 - 1 * l_2 \geq -k * l_2; \\
 &l_1 - 3.5 * u_2 \leq k * u_2; \quad l_1 - 3.5 * u_2 \geq -k * u_2; \\
 &m_1 - 4 * m_2 \leq k * m_2; \quad m_1 - 4 * m_2 \geq -k * m_2; \\
 &u_1 - 4.5 * l_2 \leq k * l_2; \quad u_1 - 4.5 * l_2 \geq -k * l_2; \\
 &l_8 - 0.66 * u_2 \leq k * u_2; \quad l_8 - 0.66 * u_2 \geq -k * u_2; \\
 &m_8 - 1 * m_2 \leq k * m_2; \quad m_8 - 1 * m_2 \geq -k * m_2; \\
 &u_8 - 1.5 * l_2 \leq k * l_2; \quad u_8 - 1.5 * l_2 \geq -k * l_2; \\
 &l_{11} - 2.5 * u_2 \leq k * u_2; \quad l_{11} - 2.5 * u_2 \geq -k * u_2; \\
 &m_{11} - 3 * m_2 \leq k * m_2; \quad m_{11} - 3 * m_2 \geq -k * m_2; \\
 &u_{11} - 3.5 * l_2 \leq k * l_2; \quad u_{11} - 3.5 * l_2 \geq -k * l_2; \\
 &\left(\frac{1}{6} * l_1 + \frac{1}{6} * 4 * m_1 + \frac{1}{6} * u_1\right) + \left(\frac{1}{6} * l_2 + \frac{1}{6} * 4 * m_2 + \frac{1}{6} * u_2\right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{6} * l_3 + \frac{1}{6} * 4 * m_3 + \frac{1}{6} * u_3\right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{6} * l_4 + \frac{1}{6} * 4 * m_4 + \frac{1}{6} * u_4\right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{6} * l_5 + \frac{1}{6} * 4 * m_5 + \frac{1}{6} * u_5\right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{6} * l_6 + \frac{1}{6} * 4 * m_6 + \frac{1}{6} * u_6\right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{6} * l_7 + \frac{1}{6} * 4 * m_7 + \frac{1}{6} * u_7\right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{6} * l_8 + \frac{1}{6} * 4 * m_8 + \frac{1}{6} * u_8\right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{6} * l_9 + \frac{1}{6} * 4 * m_9 + \frac{1}{6} * u_9\right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{6} * l_{10} + \frac{1}{6} * 4 * m_{10} + \frac{1}{6} * u_{10}\right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{6} * l_{11} + \frac{1}{6} * 4 * m_{11} + \frac{1}{6} * u_{11}\right) = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & l_1 \leq m_1 \leq u_1; \quad l_2 \leq m_2 \leq u_2; \quad l_3 \leq m_3 \leq u_3; \quad l_4 \leq m_4 \leq u_4; \quad l_5 \leq m_5 \\
 & \leq u_5; \quad l_6 \leq m_6 \leq u_6; \\
 & l_7 \leq m_7 \leq u_7; \quad l_8 \leq m_8 \leq u_8; \quad l_9 \leq m_9 \leq u_9; \quad l_{10} \leq m_{10} \leq u_{10}; \quad l_{11} \\
 & \leq m_{11} \leq u_{11} \\
 & l_1 > 0; \quad l_2 > 0; \quad l_3 > 0; \quad l_4 > 0; \quad l_5 > 0; \quad l_6 > 0; \quad l_7 > 0; \quad l_8 \\
 & > 0; \quad l_9 > 0; \quad l_{10} > 0; \quad l_{11} > 0 \\
 & K \geq 0
 \end{aligned}$$



پس از حل مسئله فوق وزن معیارها در حالت فازی به صورت زیر محاسبه شده است:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_1^* &= (0.2496.0.2496.0.3446); \tilde{W}_2^* = (0.0354.0.0585.0.0369); \tilde{W}_3^* = \\ &(0.0365.0.0163.0.0925); \tilde{W}_4^* = (0.1576.0.1221.0.1666); \tilde{W}_5^* = \\ &(0.0444.0.0359.0.0222); \tilde{W}_6^* = (0.1000.0.1112.0.1225); \tilde{W}_7^* = \\ &(0.1111.0.1111.0.1111); \tilde{W}_8^* = (0.1445.0.1222.0.1117); \tilde{W}_9^* = \\ &(0.0977.0.0886.0.0895); \tilde{W}_{10}^* = (0.0996.0.0687.0.0776); \tilde{W}_{11}^* = \\ &(0.1011.0.1131.0.1197); \xi^* = (0.3226.0.3226.0.3226)\end{aligned}$$

با توجه به اوزان به دست آمده برای معیارها در حالت فازی، می‌توان بر اساس رابطه (۳)، مقادیر فازی را به اوزان قطعی و غیر فازی به صورت زیر تبدیل کرد.

$$\begin{aligned}W_1^* &= 0.3204; \quad W_2^* = 0.0510; \quad W_3^* = 0.0823; \quad W_4^* = 0.1002; \\ W_5^* &= 0.090; \quad W_6^* = 0.0964; \quad W_7^* = 0.0922 \\ W_8^* &= 0.1093; \quad W_9^* = 0.1054; \quad W_{10}^* = 0.058; \quad W_{11}^* = 0.0991\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\tilde{a}_{BW} = \tilde{a}_{12} = (7/2.4.9/2)$ و با مراجعه به جدول (۲) شاخص سازگاری برای این مورد ۸,۰۴ بوده و با توجه به رابطه (۱۳) نرخ سازگاری برابر است با $0.3226/8.04 = 0.040$ که بیانگر نرخ سازگاری مناسب و نزدیک به صفر برای محاسبات انجام شده است. البته باید نرخ سازگاری برای حالتی که این مسئله در حالت قطعی و بدون در نظر گرفتن معیارهای فازی نیز محاسبه شود تا مقایسه بین دو حالت انجام گیرد.

نتیجه‌گیری

همان طور که در بخش‌های قبلی بیان شد. این مقاله رویکرد ترکیبی جدیدی در حوزه تصمیم‌گیری چندمعیاره ارائه کرده است. نوآوری این مقاله در مقایسه با تحقیقات قبلی استفاده از تکنیک خوشه‌بندی در روش بهترین - بدترین بوده است؛ به طوری که در نتیجه این رویکرد می‌توان دریافت که تعداد مقایسه‌های زوجی در مقایسه با روش بهترین - بدترین^۱ در کمتر شده و این تعداد به اندازه تعداد خوشه‌ها است. از طرف دیگر، برای به دست آوردن نرخ سازگاری مطمئن‌تر و مناسب‌تر از متغیرهای بیانی برای انجام مقایسات زوجی استفاده شده است؛ به طوری که در نتیجه به کارگیری این

رویکرد می‌توان گفت علاوه بر کاهش تعداد مقایسات زوجی نسبت به حالت عادی، نرخ سازگاری نیز بهبود می‌یابد. خوشه‌بندی روی داده‌ها علاوه بر اینکه مقایسات را کاهش می‌دهد، باعث می‌شود معیارهای نزدیک به هم مشخص شوند. این کار باعث می‌شود تصمیم‌گیرنده در مقایسه‌های داخل خوشه‌ها از اعداد متغیرهای زبانی با مقادیر بالا به ندرت استفاده کند و از این امر آگاه باشد که این معیارها به یکدیگر نزدیک هستند. این کار باعث می‌شود ناسازگاری مقایسات کم بشود.



منابع

- Rezaei, J., *Best-worst multi-criteria decision-making method*. Omega (United Kingdom), ۲۰۱۵. ۵۳: p. ۵۷-۴۹
- Tian, Z.-p., et al., *A multi-phase QFD-based hybrid fuzzy MCDM approach for performance evaluation: A case of smart bike-sharing programs in Changsha*. Journal of Cleaner Production, ۲۰۱۸. ۱۷۱: p. ۱۰۸۳-۶۰۶۸
- Safarzadeh, S., S. Khansefid, and M. Rasti-Barzoki, *A group multi-criteria decision-making based on best-worst method*. Computers and Industrial Engineering, ۲۰۱۸. ۱۲۶: p. ۱۲۱-۱۱۱
- Hafezalkotob, A. and A. Hafezalkotob, *A novel approach for combination of individual and group decisions based on fuzzy best-worst method*. Applied Soft Computing Journal, ۲۰۱۷. ۵۹: p. ۲۲۵-۳۶۶
- Jia, F. and X.Y. Wang, *BWM-TOPSIS multi-criteria group decision-making method based on rough number*. Kongzhi yu Juece/Control and Decision, ۲۰۱۶. ۳۱(۱۰): p. ۱۹۲۰-۱۹۱۵
- You, X., T. Chen, and Q. Yang, *Approach to multi-criteria group decision-making problems based on the best-worst-method and electre method*. Symmetry.(۹)۸. ۲۰۱۶ ,
- Aboutorab, H., et al., *ZBWM: The Z-number extension of Best Worst Method and its application for supplier development*. Expert Systems with Applications, ۲۰۱۸. ۱۰۷: p. ۱۲۵-۱۱۵
- Alimohammadlou, M. and A. Bonyani, *Fuzzy BWANP multi-criteria decision-making method*. Decision Science Letters, ۲۰۱۹. ۸(۱): p. ۹۴-۵۵
- Groenendijk, L., J. Rezaei, and G. Correia, *Incorporating the travellers' experience value in assessing the quality of transit nodes :A Rotterdam case study*. Case Studies on Transport Policy, ۲۰۱۸. ۶(۴): p. ۵۷۶-۵۶۴
- Rezaei, J., A. Hemmes, and L. Tavasszy, *Multi-criteria decision-making for complex bundling configurations in surface transportation of air freight*. Journal of Air Transport Management, ۲۰۱۷. ۱۱: p. ۱۰۵-۹۵
- Yadollahi, S., A. Kazemi, and B. Ranjbarian, *Identifying and prioritizing the factors of service experience in banks: A best-Worst method*. Decision Science Letters, ۲۰۱۸. ۷(۴): p. ۴۶۴-۴۵۵
- Askarifar, K., Z. Motaffef, and S. Aazaami, *An investment development framework in Iran's seashores using TOPSIS and best-worst multi-criteria decision making methods*. Decision Science Letters, ۲۰۱۸. ۷(۱): p. ۶۴-۵۵
- Gupta, H. and M.K. Barua, *Identifying enablers of technological innovation for Indian MSMEs using best-worst multi criteria decision making method*. Technological Forecasting and Social Change, ۲۰۱۶. ۱۰۷: p. ۷۹-۶۹
- Zadeh, L.A., *Fuzzy sets*. Information and Control, ۱۹۶۵. ۸(۳): p. ۳۵۳-۳۳۸
- Carlsson, C. and R. Fullér, *On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers*. Fuzzy Sets and Systems, ۲۰۰۱. ۱۲۲(۲): p. ۲۲۶-۳۱۵.