فصلنامه‌ی اقتصاد مقداری

صفحه ی اصلی وب سایت مجله:
www.jqe.scu.ac.ir
شاپا الکترونیکی: ۴۲۷۱-۲۷۱۷
شاپا چاپی: ۵۸۵۰-۲۰۰۸

مقایسه عملکرد میانگین با میانه و دیگر شاخص‌های ریسک در بهینه‌سازی سبد سهام

عباس خندان*

** استادیار اقتصاد، گروه اقتصاد امور عمومی، دانشکده اقتصاد، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران (نویسنده مسئول)*

اطلاعات مقاله

طبقه‌بندی JEL: *C61، G11، C63*

تاریخ دریافت: ۹ اسفند ۱۳۹۹
تاریخ بازنگری: ۲۵ شهریور ۱۴۰۰
تاریخ پذیرش: ۳ آبان ۱۴۰۰

واژگان کلیدی:
بهینه‌سازی سبد دارایی، میانگین، میانه، متنوع‌سازی

ارتباط با نویسنده (گان) مسئول:
ایمیل:
Khandan.abbas@khu.ac.ir
0000-0002-4558-6653

آدرس پستی:
تهران، دانشگاه خوارزمی، دانشکده اقتصاد، گروه اقتصاد امور عمومی

قدردانی: نویسندگان از نظرات و پیشنهادات ارزشمند داوران که کیفیت این مقاله را بهبود بخشیده‌اند تشکر و قدردانی می‌کنند.

تضاد منافع: نویسنده مقاله اعلام می‌کند که در انتشار مقاله ارائه شده تضاد منافعی وجود ندارد.

منابع مالی: نویسنده هیچگونه حمایت مالی برای تحقیق، تألیف و انتشار این مقاله دریافت نکرده‌است.

چکیده

مدل بهینه‌سازی سبد سهام مارکویتز دارای نواقصی است که از مهمترین آنها فرض نرمال بودن بازده سهام در بازار است. نرمال بودن بازده سهام بازارها در بسیار از مطالعات رد و نشان داده شده که در این صورت دیگر میانگین شاخص خوبی برای بیشینه‌سازی نیست. میانگین تا حد زیادی تحت تأثیر مقادیر پرت با بازده خیلی بالا قرار دارد. یکی از راه‌حل‌هایی که برای این مسئله ارائه شده بکارگیری میانه به جای میانگین در بهینه‌سازی سبد سهام است. هدف اصلی این مقاله مقایسه عملکرد مدل‌های بهینه‌سازی میانگین و میانه است. در این راستا مدل‌های متعددی از بیشینه‌سازی میانه یا میانگین در کنار شاخص‌های مختلف ریسک ارائه و با داده‌های واقعی بیست شرکت بورسی ایران از ابتدای سال ۲۰۱۶ تا انتهای سال ۲۰۱۹ مورد آزمون و مقایسه قرار گرفتند. مهمترین نتیجه بدست آمده حاکی از عملکرد بهتر میانه از نظر بازده است. مدل بیشینه‌سازی میانه در بیشتر از ۷۱ درصد موارد بازده‌های بالاتری کسب کرده و متوسط بازده سبد بهینه آن نیز بیشتر بوده است. این بدان معنی است که با بکارگیری میانه در بهینه‌سازی و انباشت دارایی در طی زمان ارزش سبد بیشتری بدست خواهد آمد. علاوه بر این و به عنوان نتیجه دوم، مشاهده شد که مدل بهینه‌سازی میانه از نظر متنوع‌سازی نیز عملکرد بسیار خوبی دارد. درجه متنوع‌سازی سبد در مدل‌های مختلفی که با قیود ریسک مختلف یا بدون آن بدست آمده نشان می‌دهد که بطور کل بهینه‌سازی میانه به جای میانگین سبد متنوع‌تری بدست خواهد داد. علاوه بر این، بکارگیری شاخص‌های مختلف ریسک نیز به ما امکان داد تا عملکرد آن را از منظر کنترل ریسک و متنوع‌سازی مورد مقایسه قرار دهیم. به عنوان نتیجه‌ای دیگر نیز مشاهده شد که دو شاخص متوسط ارزش در معرض ریسک (CVaR) و انحرافات مطلق (MAD) در مقایسه با دیگر شاخص‌های ریسک از لحاظ کنترل ریسک در دامنه پایین توزیع یعنی مقادیر زیان و همچنین به لحاظ متنوع‌سازی عملکرد بسیار بهتری به همراه داشته‌اند.

ارجاع به مقاله:

خندان، عباس. (۱۴۰۲). مقایسه عملکرد میانگین با میانه و دیگر شاخص‌های ریسک در بهینه‌سازی سبد سهام. فصلنامه‌ی اقتصاد مقداری (بررسی های اقتصادی سابق)، ۲۰(۱)، ۱۳۸-۹۹.

doi 10.22055/jqe.2021.36778.2349

۱- مقدمه

بهینه‌سازی سبد دارایی‌ها تلاشی است برای یافتن نسبت‌های بهینه از ثروت که باید به سهام‌ها و دارایی‌های مختلف اختصاص یابد. بهینه‌سازي نیز فرايندي است که طي آن با توجه به محدوديتهاي موجود در هر تصميم‌گيري، مطلوبترين توازن ميان علايق متضاد مشخص مي‌شود (Taghizadeh Yazdi, Fallahpour & Ahmadi Moghaddam, 2017). مارکویتز (۱۹۵۲) به عنوان پیشگام این حوزه توازن بین دو معیار بازده انتظاری و ریسک در سرمایه‌گذاری‌ها را ضروری بر می‌شمارد (Markowitz, 1952). در مدل مارکویتز مقادیر بازده انواع دارایی‌ها به عنوان متغیرهایی تصادفی نرمال در نظر گرفته

می‌شوند که توزیع آنها را می‌توان با دو گشتاور مرتبه اول و دوم نمایش داد. در کاربردهای واقعی، امید انتظاری مقادیر آتی بازده، معیار نخست، از میانگین مقادیر تاریخی بازده در گذشته بدست می‌آید و معیار دوم یعنی ریسک نیز توسط واریانس اندازه گرفته می‌شود. این مدل‌ها که به مدل‌های میانگین-واریانس نیز شهرت دارند به دلیل ویژگی تحدب ساده و به آسانی قابل مدل‌سازی و حل هستند. در طول بیش از نیم قرن گذشته، این مدل بهینه‌سازی سبد میانگین-واریانس[1] (MVPO) خیلی سریع به عنوان مدل استاندارد در مدیریت پورتفولیو و قیمت‌گذاری دارایی‌ها شناخته شد و واریانس نیز به مهمترین و پرکاربردترین شاخص ریسک بدل گشت. همین مدل بود که پایه‌های نظریه مدرن پورتفولیو[2] را فراهم آورد و اساس مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای[3] (CAPM) قرار گرفت. با این وجود، مطالعات اخیر نشان داده‌اند که کاربرد مدل بهینه‌سازی میانگین-واریانس مارکویتز در دنیای واقعی با اشکالاتی همراه است. مرکوریو و همکاران (۲۰۲۰) پنج اشکال عمده در ارتباط با کاربرد این مدل بر می‌شمارد. (۱) در نتایج بهینه بدست آمده وزن بسیار زیادی به دارایی‌ها با ریسک بالا اختصاص می‌یابد، (۲) اختلال در ساختار وابستگی دارایی‌ها[4]، (۳) تغییرات بسیار شدید در نتایج بهینه با تغییر کوچکی در ورودی‌ها، (٤) ناکارایی در بکارگیری

---

1 Mean-Variance Portfolio Optimization

2 Modern portfolio theory

3 Capital Asset Pricing Model

4 Assets’ dependence structure

مقادیر بازده غیرنرمال و نامتقارن، و (۵) برآورد ماتریس کواریانس و بازده‌های مورد انتظار مشکل است (Mercurio, Wu & Xie, 2020).

یکی از مهمترین اشکالات در موارد مطرح شده، ناکارایی مدل‌های بهینه‌سازی میانگین-واریانس (MVPO) در بکارگیری مقادیر بازده غیرنرمال و نامتقارن است. همانطور که گفته شد مدل مارکویتز بر فرض نرمال بودن مقادیر بازده تحقق یافته در گذشته پایه‌گذاری شده در حالی که نمونه‌های زیادی از بازارها می‌توان یافت که این فرض نرمال بودن در آن‌ها مورد تردید است. غیرنرمال بودن باعث می‌شود که دیگر نتوان در بهینه‌سازی صرفاً بر میانگین و واریانس تکیه کرد. میانگین برآوردگر ضعیفی است که تا حد بسیار زیادی از مقادیر پرت[5] تأثیر می‌گیرد. حتی برخی روش بهینه‌سازی میانگین-واریانس را روش حداکثرسازی خطا نامیده‌اند (Broadie, 1993). علاوه بر این و صرف نظر از ناکارآمدی میانگین، در صورت غیر نرمال بودن توزیع مقادیر بازده، واریانس نیز دیگر نمی‌تواند به‌خوبی پراکندگی را توضیح دهد. کونت (۲۰۰۱) معتقد است که یک مدل پارامتریک در صورتی قادر به بازتولید تمام ویژگی‌های غیرنرمال توزیع بازده است که علاوه بر پارامترهای مکان و پراکنش توزیع، بتواند دم‌سنگینی توزیع و عدم‌تقارن آن را نیز در نظر بگیرد (Cont, 2001). او تأکید می‌کند که "بنا به ویژگی‌های غیرگوسی توزیع، بکارگیری دیگر شاخص‌های پراکنش غیر از انحراف‌معیار به‌منظور در مدل آوردن کل تغییرات بازده ضروری است" (Cont, 2001, p. 4). این مشکلات باعث شده تا برخی به این نتیجه برسند که روش میانگین واریانس باید به کل کنار گذاشته شود (Jagannathan & Ma, 2003) و حتی معتقدند که استراتژی‌های منفعلانه‌ای مانند وزن‌دهی یکسان میان همه سهام‌ها عملکرد بهتری خواهند داشت (DeMiguel, Garlappi & Uppal, 2009).

اما به هر حال از آنجایی که پارامترهای نشانگر مکان و پراکندگی توزیع نقش زیادی در تصمیم‌گیری‌های مالی دارند و نمی‌توان آنها را نادیده گرفت، بسیاری از پژوهشگران در سال‌های اخیر پیشنهاد داده‌اند که در مدل‌های میانگین-واریانس از آماره‌های استوارتری[6] استفاده شود. برخی از مطالعات یک روش دو مرحله‌ای را به‌کار بسته‌اند که در آن ابتدا یک برآوردگر استوار انتخاب شده و سپس این برآوردگرهای استوارتر در بهینه‌سازی استفاده

[5] Outliers

[6] Robust statistics

می‌شوند و در مقابل برخی دیگر معتقدند که برآورد آماره‌های استوار و همچنین بهینه‌سازی هر دو باید همزمان انجام شوند. در این میان، یکسری دیگر از مطالعات نیز به‌جای میانگین توجه خود را به استفاده از میانه در بهینه‌سازی سبد معطوف ساخته‌اند. این مطالعه در همین راستا به دنبال بررسی و مقایسه عملکردی میانه نسبت به میانگین در بهینه‌سازی سبد سهام است و برای این منظور از اطلاعات قیمتی روزانه بیست سهام مختلف[7] بورس اوراق بهادار ایران برای ۹٦۲ روز (دی ۱۳۹٤ تا آذر ۱۳۹۸)[8] استفاده خواهد شد. علاوه بر این، در بهینه‌سازی سبد سهام شاخص‌های مختلفی از پراکندگی توزیع و ریسک از جمله شاخص ریسک متوسط انحرافات مطلق[9] (MAD)، ارزش در معرض ریسک[10] (VaR)، متوسط ارزش در معرض ریسک[11] (CVaR)، و حدأکثر زیان[12] (ML) در کنار هر دو شاخص مکانی توزیع یعنی میانگین و میانه به کار گرفته خواهد شد و عملکرد آنها نیز مورد محک و ارزیابی قرار خواهد گرفت.

---

[7] یافتن میانه و بهینه‌سازی آن گاه نیازمند استفاده از قیدهای جبری به تعداد زیاد است، به‌گونه‌ای که حجم بالای مشاهدات بر پیچیدگی‌های برخی مدل‌ها خواهد افزود و می‌تواند خیلی سریع آن‌ها غیرقابل محاسبه سازد. از این رو، در ارتباط با تعداد سهام مورد بررسی محدودیت محاسباتی وجود دارد. در این راستا، بیست شرکت که در این مدت کمترین تعداد روزهای بدون معامله را داشته‌اند برای بررسی انتخاب گردیدند.

[8] دلیل عدم استفاده از داده‌ها و اطلاعات پس از دی ۱۳۹۸ و در واقع بستن بازه مطالعاتی در این تاریخ، اتفاقاتی است که در بورس ایران از همان زمان یعنی دی ۱۳۹۸ تا به امروز افتاده است. شاخص کل بورس ایران از ابتدای دی ۱۳۹۸ از ۳٥٦۷۲۱٫۱ واحد طی مدت هفت ماه و بیست روز به رقم باور نکردنی ۲۰۷۸٥٤٦٫۸ در ۱۹ مرداد ماه ۱۳۹۹ رسید. به‌عبارتی، شاخص بطور متوسط (متوسط هندسی) ماهانه حدود ۳۰ درصد رشد کرده است که پیش از آن مشابه این رشد وجود نداشته است. از آن پس نیز شاخص مجدد طی یک روند نزولی شدید طی ٥ ماه و ۱۰ روز به سطح ۱۱٥۰۲۲٥ واحد سقوط کرد. به‌عبارتی، شاخص بطور متوسط (متوسط هندسی) ماهانه حدود ۱٥ درصد کاهش داشته است. این صعود و سقوط شدید و بازده‌های مثبت و منفی مشاهده شده بطور کل توزیع مقادیر بازده را تغییر داده و تمام مقادیر بازده سال‌های پیش را تحت تأثیر خود قرار می‌داد. از آنجائی که در این مطالعه هدف بررسی عملکردی مدل‌های مختلف و مقایسه میانگین و میانه بود و نه صرفاً پیش‌بینی اتفاقات بورس ایران، مطلوب این بود که این بررسی و ارزیابی در طی مدت زمان طولانی‌تری صورت گیرد. به این صورت بود که ترجیح داده شد با در نظر گرفتن شرایط با ثبات‌تر سال‌های پیش از دی ۱۳۹۸ ارزیابی و مقایسه مدل‌ها انجام پذیرد.

[9] Mean Absolute Deviation

[10] Value at Risk

[11] Conditional Value at Risk

[12] حدأکثر زیان (Maximum Loss) که تحت عنوان بدترین حالت (*Worst Case*) نیز شناخته می‌شود.

ساختار مقاله بدین صورت است که در ادامه و در بخش دوم ادبیات موضوع با جزئیات بیشتر مرور خواهد شد. بخش سوم به ارائه مدل‌های بهینه‌سازی مورد نظر با شاخص میانگین و میانه در کنار انواع شاخص‌های ریسک که بطور جایگزین به مدل افزوده می‌شوند اختصاص دارد. عملکرد این مدل‌های مختلف بهینه‌سازی بر اساس بازده کسب شده و همچنین یکسری شاخص‌های دیگر در ارتباط با متنوع‌سازی سبد ارزیابی خواهد شد که در ادامه همین بخش سوم مورد بحث قرار خواهند گرفت. بخش چهارم به ارائه نتایج پرداخته و در نهایت بخش پنجم نیز به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

۲- مرور ادبیات موضوع

مدل‌های میانگین-واریانس که از زمان معرفی توسط مارکویتز (۱۹۵۲) تا امروز بطور گسترده‌ای در بهینه‌سازی دارایی‌ها بکار گرفته شده، از جهاتی مورد انتقاد قرار گرفته‌اند. در مدل مارکویتز مقادیر بازده انواع دارایی‌ها به عنوان متغیرهایی تصادفی نرمال در نظر گرفته می‌شوند که توزیع آنها را می‌توان با دو گشتاور مرتبه اول یعنی میانگین و گشتاور مرتبه دوم یعنی واریانس نمایش داد. اما از آنجائی‌که فرض نرمال بودن مقادیر بازده تحقق یافته در بسیاری از بازارها مورد تردید قرار گرفته، این مدل‌ها تا حدود زیادی کارآیی خود را از دست می‌دهند. ویژگی‌های غیرنرمال مقادیر بازده مثل دُم‌سنگینی، چولگی و حتی وجود اثرات تقویمی در بسیاری از مطالعات مورد اشاره قرار گرفته است (Erfani & Safari, 2014; Karandikar, 2012; Raei & Nabizadeh, 2013; Sornette, 2004; Viswanathan & Maheswaran, 2017). در این صورت دیگر حتی واریانس نیز نمی‌تواند شاخص خوبی از ریسک باشد (Mercurio et al., 2020). اختصاص وزن زیاد در پورتفو بهینه به سهام با ریسک بالا، استفاده از مقادیر آماری گذشته در برآورد ماتریس واریانس و کواریانس و فرض بر ثبات آن در آینده، و وابستگی شدید پورتفو بهینه به مقادیر ورودی و داده‌های پرت از دیگر مشکلاتی هستند که در ارتباط با نظریة مدرن پورتفو مطرح شده‌اند (Mercurio et al., 2020; Schulmerich, Leporcher & Eu, 2015).

در پاسخ به این مشکلات، بسیاری از مطالعات روش‌های دیگری را به‌کار گرفتند که می‌توان آنها را در سه دسته قرار داد. دستة اول مطالعاتی هستند که برای بهینه‌سازی پورتفولیو، بطور کلی این روش و نظریة مدرن پورتفو را کنار گذاشته و به استفاده از

روش‌های الگوریتمی ابتکاری[13] روی آورده‌اند. الگوریتم‌های ابتکاری مانند الگوریتم دسته‌های میگو[14] (Tehrani, Fallah & Asefi, 2018)، الگوریتم ژنتیک (Azar, Yazdanian & Ghandehari, 2019; Gupta, Mehlawat & Mittal, 2012; Sefiane & Benbouziane, 2012;) و روش ازدحام ذرات[15] (Kamali, 2015; Zhu, Wang, Wang & Chen, 2011) که در ابتدا برای حل مسائل بهینه‌سازی گسسته به‌کار می‌رفتند، به‌تازگی در حل مسائل پیوسته نیز بسیار استفاده می‌شوند به‌ویژه در شرایطی که روش‌های مشتق محور[16] به شکست بخورند یا مسئله نامحدب بوده و دارای تعداد زیادی جواب موضعی باشد. با این وجود، از آنجائی‌که این روش‌های ابتکاری تئوری ریاضی قوی ندارند و جوابی که بدست می‌دهند قابلیت ارزیابی به لحاظ بهینگی را ندارد[17]، همچنان بسیاری ترجیح می‌دهند که با تعدیلاتی از مدل‌هایی مشابه مدل مارکویتز استفاده کنند.

دسته دوم مطالعاتی هستند که با وجود این مشکلات نظریة مدرن پورتفو را بسیار مهم و ارزشمند دانسته و با اندکی تغییرات به تعدیل نظریة مدرن پورتفو پرداخته و آن را به‌کار می‌گیرند. این دستة دوم از مطالعات را می‌توان در دو گروه تقسیم کرد. گروه اول مطالعاتی هستند که در اصطلاح نظریة فرامدرن پورتفولیو[18] (PMPT) نامیده می‌شوند. این گروه از مطالعات بیشتر از همه بر ناکارایی واریانس به عنوان شاخصی از ریسک تمرکز دارند و به عنوان راهکار کمینه‌سازی تنها نوسانات دامنه پایین توزیع[19] به عنوان ریسک، در نظر گرفتن توزیع مقادیر بازده بصورت لگاریتم نرمال به‌جای نرمال، بهینه‌سازی گشتاورهای بالاتر از واریانس مانند چولگی و کشیدگی را در نظر گرفتند (Rom & Ferguson, 1993; Sortino & Price, 1994; Swisher & Kasten, 2005). طبق نظریة فرامدرن پورتفولیو، هر فردی یک حدأقل بازده قابل پذیرش[20] (MAR) خاص خود را دارد و مقادیر بازده بالاتر

---

[13] Heuristic

[14] Krill herd

[15] Particle Swarm Optimization

[16] Gradient-based methods

[17] قابلیت ارزیابی این که جواب بدست آمده چقدر با جواب بهینه واقعی فاصله دارد وجود ندارد و به همین دلیل به جواب حاصل از الگوریتم‌های ابتکاری در اصطلاح جواب خوب در مقابل بهینه گفته می‌شود.

[18] Post-Modern Portfolio Theory

[19] Downside Volatility

[20] Minimum Acceptable Return

از آن در واقع شگفتی خوب محسوب می‌شوند و نه ریسک بد که به دنبال کنترل آن باشیم. به عبارت دیگر، تنها باید نوسانات بازده در دامنه پایین توزیع در سطوح کمتر از حدأقل بازده قابل پذیرش (MAR) به عنوان ریسک تلقی شود. البته این ریسک نمی‌تواند به راحتی جایگزین انحراف معیار در نظریة مدرن پورتفو شود و به شیوه‌های جدید محاسباتی نیاز است. در این روش ضرایب آلفا و بتا و نسبت شارپ[۲۱] کنار گذاشته شده و به‌جای آنها از ضرایب اومگا و نسبت سورتینو[۲۲] استفاده می‌شود. راسیا (۲۰۱۲) در بررسی خود نشان می‌دهد که نظریة فرامدرن پورتفو به متنوع‌سازی بیشتر در سبد سرمایه‌گذاری می‌انجامد (Rasiah, 2012). جامباسو و همکاران (۲۰۱۳) به مقایسه تفاوتهای اندازه‌گیری ریسک در نظریة مدرن و فرامدرن پورتفو پرداخته و بصورت نظری و همچنین تجربی نشان می‌دهد که نظریة فرامدرن پورتفو (PMPT) نتایج بهتری بدست می‌دهد (Geambasu, Sova, Jianu & Geambasu, 2013). نظریة فرامدرن پورتفو در بسیاری از زمینه‌های مالی (Chen, Song, Gao & Qiao, 2017; Cooper, Evnine, Finkelman, Huntington & Lynch, 2016) و غیرمالی (Hu, Ansari Mahabadi, Massah Bavani & Bagheri, 2018; Harmsen, Crijns-Graus & Worrel, 2019) کاربرد فراوانی یافته است.

گروه دوم از مطالعاتی که به تعدیل نظریة مدرن پورتفو پرداخته‌اند، نه به اندازه‌گیری ریسک که دیگر اشکالات مهم آن توجه داشته‌اند. یکی از اشکالات مهم نظریة مدرن پورتفو، تغییرات شدید پورتفو بهینه در نتیجة تغییر مقادیر ورودی از آمارهای گذشته است. از این رو است که این مطالعات بر استفاده از آماره‌های استوار[۲۳] به‌جای استفاده از گشتاورها تمرکز کرده‌اند. منظور از آماره استوار ارزیابی پایداری و ثبات مقادیر برآورد شده از پارامترهای توزیع به‌طور ویژه در صورت وجود مقادیر پرت و تصریح اشتباه[۲۴] است. این دسته از مطالعات که مرور تفصیلی از آنها را می‌توان در فابتوزی و همکاران (۲۰۰۷) یافت، در واقع با تأکید بر لزوم بکارگیری آماره‌های استوار در بهینه‌سازی دارایی‌ها به دنبال بهبود روش میانگین-واریانس بوده‌اند (Fabozzi, Kolm, Pachamanova & Focardi, 2007).

---

21 Sharpe ratio

22 Sortino ratio

23 Robust Statistics

24 Misspecification

برخی یک روش دو مرحله‌ای را به‌کار بسته‌اند به این صورت که ابتدا و به عنوان مرحله نخست یک برآوردگر استوار برای میانگین و واریانس توزیع انتخاب می‌گردد و سپس در مرحله دوم این برآوردگرهای استوارتر در مدل میانگین-واریانس قرار داده شوند (Grossi & Laurini, 2011; Huo, Kim & Kim, 2012). کارا و همکاران (۲۰۱۹) به همین‌طریق و در مرحله اول یک آماره استوار از ارزش در معرض ریسک (VaR) ساخته و سپس آن را در مرحله دوم برای یافتن پورتفو بهینه به کار می‌گیرند (Kara, Ozmen & Weber, 2019). و برخی دیگر معتقدند که برآورد آماره‌های استوار و همچنین بهینه‌سازی یا به عبارتی هر دو مرحله همزمان انجام شوند (DeMiguel & Nogales, 2009; Trzpiot & Majewska, 2008; Yang, Couillet & McKay, 2015). حل این مدل‌ها که البته بهینه‌سازی در آن‌ها قاعدتاً سخت‌تر خواهد بود به این صورت است که میانگین از تابع هدف حذف می‌شود و بهینه‌سازی به صورت یک مسئله حداقل‌سازی واریانس انجام می‌شود. براندا و همکاران (۲۰۱۸) بطور مثال با حدأقل سازی ریسک، بطور مشخص ارزش در معرض ریسک (VaR) و متوسط ارزش در معرض ریسک (CVaR)، به بهینه‌سازی پورتفو تحت فرض نرمال بودن مقادیر بازده و معادل استوار گشتاورها می‌پردازند (Branda, Bucher, Cervinka & Schwartz, 2018). لی (۲۰۱۸) بهینه‌سازی پورتفو را با بدست آوردن آماره استوار ریسک حدأکثر زیان (ML) یا بدترین حالت محاسبه می‌کنند (Li, 2018). یکی دیگر از مدل‌های استوار حداقل‌سازی واریانس توسط یانو (۲۰۱۳) معرفی شد که در آن ماتریس واریانس-کواریانس به شیوه گشتاورهای مرتبه L برآورد می‌شود (Yanou, 2013). این روش از آن جهت استوار تلقی می‌شود که بر پایه برآوردگرهای چندک وزن‌دهی شده با شاخص‌های ریسک انحراف[25] قرار دارد. کیو و همکاران (۲۰۱۵) نیز رویکردی بر مبنای آماره‌های چندک برای بهینه‌سازی استوار سبد استفاده کردند با این تفاوت که روش آنها بر گشتاوارهای مرتبه بالا متکی نبود و از این جهت برای توزیع‌های دم‌سنگین مناسب‌تر بود (Qui et al., 2015). گربر و همکاران (۲۰۱۵) با ذکر این مشکل که در نظریة مدرن پورتفولیو محاسبه ماتریس کواریانس وابسته به مقادیر همبستگی گذشته است، استفاده از یک آماره

[25] Distortion risks

استوار گربر[26] را پیشنهاد می‌کند و نشان می‌دهد که این آماره در بهینه‌سازی پورتفو عملکرد بهتری دارد (Gerber et al., 2015).

اما دستهٔ سوم از مطالعات نیز هستند که نه نظریهٔ مدرن پورتفو را کنار گذاشته و نه برای تعدیل آن تلاش کرده‌اند بلکه صرفاً با استفاده از دیگر متغیرها و پارامترها در بهینه‌سازی به‌جای میانگین و واریانس، تلاش داشته‌اند از اشکالات مطرح شده اجتناب کنند. این دستهٔ سوم از مطالعات را نیز می‌توان به دو گروه تقسیم کرد. گروه اول بر بکارگیری یک شاخص دیگر از ریسک به‌جای واریانس تمرکز کرده‌اند که متکی بر انحراف معیار مقادیر بازده نباشد. شاخص ریسک آنتروپی[27] مهمترین این موارد است. بهینه‌سازی پورتفولیو با کمینه‌سازی آنتروپی نه‌تنها با توزیع‌های غیرمتقارن کارایی دارد بلکه اصلاً نیازی به فرض نرمال بودن توزیع ندارد و در واقع یک روش ناپارامتریک است. آنتروپی مفهومی است مرتبط با احتمالات که نخستین بار شانون آن را مطرح کرد (Shannon, 1948). آنتروپی در واقع درجهٔ تصادفی بودن یا نااطمینانی موجود در یک توزیع احتمال را نشان می‌دهد. مرکوریو و همکاران (۲۰۲۰) معتقدند که استفاده از آنتروپی به عنوان شاخصی از ریسک تمام مشکلاتی که نظریهٔ مدرن پورتفو با آن روبرو بود را برطرف می‌سازد (Mercurio et al., 2020). از همین جهت است که بهینه‌سازی پورتفو مبتنی بر آنتروپی کاربرد زیادی یافته است (Dai, 2018; Rotella, 2017; Zhou, 2017).

گروه دوم از این دستهٔ از مطالعات اما بر بکارگیری شاخص‌های دیگری به‌جای میانگین توجه داشته‌اند. مهمترین پارامتر جایگزین به‌جای میانگین البته میانه است که در بهینه‌سازی سبد مورد توجه قرار گرفته است. در یک آزمایش قدیمی توکی (۱۹۶۰) به‌خوبی نشان داد که اگر داده‌ها از یک توزیع نرمال پیروی کنند، میانگین برآوردگر نمونه‌ای دقیق‌تری نسبت به میانه است؛ یعنی انحراف معیار کمتری دارد (Tukey, 1960). اما در صورتی‌که آمار و اطلاعات توزیع مخلوطی از دو توزیع نرمال داشته باشند، میانه برآوردگری دقیق‌تر خواهد بود. با یک مثال ساده[28] که در رابطه (۱) نشان داده شده می‌توان به راحتی حساسیت میانگین به داده‌های پرت و مزیت بکارگیری میانه در متنوع‌سازی و کنترل ریسک را نشان

[26] Gerber Statistics

[27] Entropy

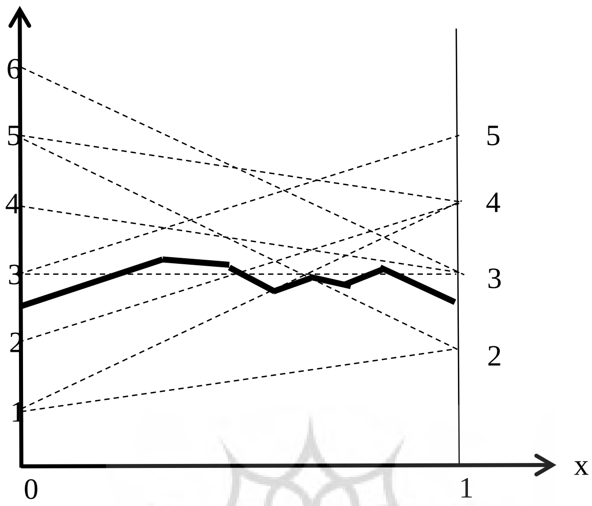
[28] این مثال با اعمال تغییراتی از بناتی (۲۰۱۵) گرفته شده است (Benati, 2015).

دانشگاه شهید چمران اهواز
فصلنامه علمی پژوهشی اقتصاد مقداری (بررسی‌های اقتصادی سابق)

داد. فرض کنید دو دارایی وجود داشته باشند و بازده آن‌ها برای مدت نه روز مشاهده و به صورت r_1 و r_2 در زیر ثبت شده باشند.

$$r_1(t) = \{3, 1,2, 3,4, 5, 5,6,1\}$$
$$r_2(t) = \{4,3, 4,5, 3, 4,3,2,2 + \varepsilon\} \qquad (1)$$

اگر سهمی که در سبد به دارایی دوم اختصاص یافته را با x نشان دهیم، در آن صورت $Z(t) = (1 - x) * r_1(t) + x * r_2(t)$ بازده در زمان t خواهد بود. می‌توان دید که میانگین بازده دارایی اول $\mu_1 = 3.33$ و میانگین بازده دارایی دوم $\mu_2 = 3.33 + 0.1\varepsilon$ است و بر این اساس در صورتی که تابع هدف بیشینه‌سازی میانگین باشد، سبد بهینه تماماً از دارایی اول تشکیل شده است. به عبارت دیگر، در صورت استفاده از میانگین در مدل و حساسیت آن به داده‌های پرت، نتیجه صفر و یکی است. اما اگر از میانه در بهینه‌سازی استفاده شود نتیجه متفاوت خواهد بود. میانه بازده‌های هر دو سهام $Med_1 = Med_2 = 3$ است. بازده سبدهای سرمایه‌گذاری که از این دو دارایی می‌تواند تشکیل شود در **شکل (۱)** نشان داده شده است. آن‌چنان که از شکل پیداست میانه بازده سبدها با وزن‌های مختلف که با رنگ تیره مشخص شده سه نقطه ماکزیمم نسبی دارد و نقطه متناظر با ماکزیمم مطلق میانه به ازاء x یا وزنی بدست آمده که ترکیبی از دو دارایی است. به عبارت دیگر، در صورت استفاده از میانه در بهینه‌سازی از هر دو دارایی در سبد وجود خواهد داشت که به معنی متنوع‌سازی است. نکته قابل توجه این است که این متنوع‌سازی بدون وارد کردن ریسک به مدل بدست آمده است در حالی که در مدل با تابع هدف میانگین نتیجه کاملاً به سهام اول سوگیری داشت.



شکل ۱. مقایسه بیشینه‌سازی میانگین و میانه در مدل بهینه‌سازی مفروض
مأخذ: بناتی ۲۰۱۵.

Figure 1. Comparing mean and median maximization in the example optimization model
Source: Benati (2015).

با توجه به این ویژگی‌ها است که بناتی و ریتزی (۲۰۰۹) مدلی برای محاسبه میانه بهینه از یک ترکیب محدب از بردارها پیشنهاد دادند و کاربرد آن در بهینه‌سازی سبد به صورت جایگزینی برای میانگین را مورد اشاره قرار دادند (Benati & Rizzi, 2009). البته حل ریاضی مسئله دشوار است چون، همانگونه که در مثال بالا مشهود بود، با توجه به مشتق‌ناپذیر بودن میانه برای یافتن ماکزیمم ناگزیر باید در مدل از متغیرهای عدد صحیح استفاده شود. این دشواری حل ریاضی مسئله باعث شد تا کاربرد آن در مالی تنها در حد اشاره باقی بماند و در مقاله بناتی و ریتزی (۲۰۰۹) هیچ شاخصی از ریسک در نظر گرفته نشود. اما به تدریج و به دنبال فرمول‌بندی نامعادلات معتبر[29] در مدل‌های برنامه‌ریزی عدد صحیح خطی[30] (MILP) و توسعه روش‌های ابتکاری در مسائل بزرگ مقیاس کاربرد مدل

[29] Valid inequalities

[30] Mixed Integer Linear Programming

میانه بهینه در بهینه‌سازی سبد افزایش یافت (Benati, 2011; Katterbauer, Oguz & Salman, 2012). بناتی (۲۰۱۵) مدل میانه بهینه را در کنار شاخص‌های مختلف ریسک در بهینه‌سازی سبد بکار می‌گیرد و آن را با داده‌های واقعی بازارهای مالی به محک آزمون می‌گذارد (Benati, 2015). هوانگ و همکاران (۲۰۱۶) با توجه به ناکارایی میانگین در مواجهه با داده‌های پرت و نویزی، یک الگوریتم بازگشت به میانه استوار[31] (RMR) را پیشنهاد می‌کنند و نشان می‌دهند که بکارگیری این الگوریتم با داده‌های واقعی به نتایج بهتری منجر خواهد شد (Huang, Zhou, Li, Hoi & Zhou, 2016). بن صلاح و همکاران (۲۰۱۸) با توجه به ویژگی‌های مثبت و استواری میانه، در محاسبه و ساختن مرز کارای پورتفولیو از رویکرد ناپارامتریک در برآورد هسته میانه[32] مقادیر بازده استفاده می‌کند و سپس با داده‌های بازار مالی فرانسه نشان می‌دهد که این مرز بهبود یافته است (Ben Salah, Chaouch, Gannoun, De Peretti & Trabelsi, 2018). مطالعات بسیار فراوان دیگری نیز هستند که کاربرد میانه در بهینه‌سازی پورتفو را مورد بررسی قرار داده و به ویژگی‌های مثبت و نتایج بهبودیافته آن اشاره کرده‌اند (Chen et al., 2017; Puerto et al., 2020).

این مطالعه در بهینه‌سازی پورتفو به‌نوعی در این دستهٔ آخر قرار می‌گیرد و قرار است با بکارگیری پارامترهای مختلف و جایگزین، نتایج مختلف آنها در بهینه‌سازی پورتفو مورد مقایسه قرار گیرد. به‌عبارتی می‌توان مهمترین هدف این مقاله را بررسی عملکرد میانگین و میانه در بهینه‌سازی پورتفو دانست که البته این مهم در کنار دیگر شاخص‌های مختلفی از ریسک از جمله شاخص ریسک انحرافات مطلق (MAD)، شاخص ریسک ارزش در معرض ریسک (VaR)، شاخص ریسک متوسط ارزش در معرض ریسک (CVaR)، شاخص ریسک حدأکثر زیان (ML) صورت خواهد پذیرفت. دلیل بکارگیری شاخص‌های مختلف ریسک در این مطالعه این واقعیت است که ریسک یک مفهوم ذهنی بوده (Boyle, Siu & Yang, 2002) و هیچ شاخص ریسک یکتایی وجود ندارد که بتواند اهداف همه سرمایه‌گذاران را در خود جای دهد (Ortobelli, Rachev, Stoyanov, Fabozzi & Biglova, 2005). به‌عنوان مثال، برخی سرمایه‌گذاران ممکن است بطور کل نگران نوسانات ناگهانی و شدید بازار صرف

---

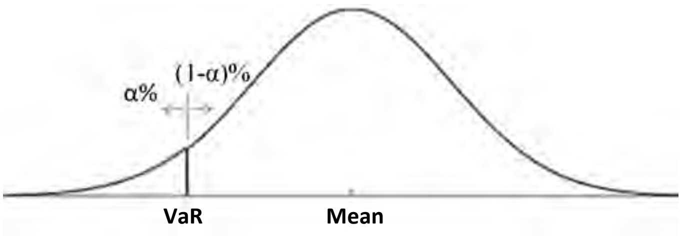
[31] Robust Median Reversion

[32] Median Kernel

نظر از جهت آن باشند در حالی‌که برخی دیگر ممکن است بیشتر نگران تغییرات و نوسانات در قسمت پایین بازده که نشانگر زیان‌های بزرگ است، باشند.

متوسط انحرافات مطلق (MAD) یکی از شاخص‌های ریسک شناخته شده است که متوسط قدرمطلق انحرافات از یک پارامتر مکان را اندازه می‌گیرد. اگر داده‌ها نرمال باشند، در آن صورت میانگین با میانه یکی است و واریانس تنها ضریبی از متوسط انحرافات مطلق (MAD) خواهد بود. اما اگر قرار بر محاسبه این پارامترها با داده‌های نمونه‌ای باشد می‌دانیم که انحراف معیار شاخصی کاراتر از متوسط انحرافات مطلق (MAD) بوده و بازه اطمینان آن نیز کوچکتر است. با این وجود، در صورتی که داده‌ها ترکیبی از دو متغیر نرمال با تعداد مشاهده فراوان و تعدادی داده پرت باشند، دیگر این قضیه درست نیست. اما در مورد مقادیر بازده، توکی (۱۹٦٠) نشان داده که اگر تعداد داده‌های پرت بیشتر از ده درصد باشد، در آن صورت متوسط انحرافات مطلق (MAD) حتی از انحراف معیار نیز کاراتر است (Tukey, 1960).

متوسط انحرافات مطلق (MAD) به کلیهٔ نوسانات بازده توجه دارد در حالی‌که برخی دیگر از شاخص‌ها تنها نوسانات در دامنهٔ پایین توزیع را در نظر می‌گیرند. اگرچه توجه به نوسانات دامنه پایین توزیع از خیلی پیش مورد تأکید بوده، اما شاید به دلایل مختلف از جمله دشواری محاسباتی چنین شاخصی وجود نداشت تا این‌که "در سال ۱۹۹٤ جی پی مورگان سنجه‌های خود از ریسک را بطور عموم منتشر کرد و در آن بر استفاده از مفهوم ارزش در معرض ریسک (VaR) برای کفایت سرمایه بانک‌های تجاری توصیه شده بود" (Fabozzi et al., 2007, p. 193). ارزش در معرض ریسک (VaR) در واقع حد یا آستانه پذیرش ریسک توسط یک فرد را نشان می‌دهد. اگر فرض شود که بازده‌ها بصورت شکل ۲ توزیع شده باشد، قاعدتاً دامنه پایین توزیع که نشانگر زیان و بازده‌های منفی است مطلوب نخواهد بود. با این وجود نمی‌توان بدون ریسک کردن توقع کسب بازده مثبت نیز داشت و افراد ناگزیر باید تا حدی از ریسک را بپذیرند. فرض کنید α درصد پایین توزیع به هیچ وجه برای فرد قابل پذیرش نباشد یا تحمل این زیان وجود نداشته باشد، و افراد می‌خواهند این قید را در بهینه‌سازی سبد در نظر بگیرند. بنابراین به این صورت عمل می‌شود که مقدار بازده متناظر با α درصد را بدست آورده و بهینه‌سازی نسبت به آن مقید می‌شود که بازده سبد هیچگاه از آن پایین‌تر نباشد. این مقدار متناظر با α درصد کنار گذاشته شده از توزیع با نام ارزش در معرض ریسک (VaR) شناخته می‌شود.



شکل ۲. نمایش مفهوم ارزش در معرض ریسک (VaR)
مأخذ: یافته‌های پژوهش
Figure 2. The concept of Value at Risk (VaR)
Source: Research results

ارزش در معرض ریسک (VaR) به دلیل مفهوم ساده و قابل درکی که دارد خیلی سریع کاربرد یافت (Torki, Esmaeli & Haghparast, 2023). با این وجود، محدودیت‌های متعددی برای این شاخص برشمرده می‌شود. مهمترین انتقاد این است که مقادیر α درصد سمت چپ توزیع نادیده گرفته می‌شوند؛ هر چقدر هم که مقادیر زیان بزرگ و قابل توجهی باشند. به زبان ریاضی، این به معنی عدم وجود خاصیت زیرجمعی است که برای متنوع‌سازی سبد مطلوب و ضروری است. اصلاحی که برای این منظور توسط راکافلار و یوریاسف (۲۰۰۰) پیشنهاد شده و تحت عنوان شاخص متوسط ارزش در معرض ریسک (CVaR) شناخته می‌شود، این است که از مقادیر α درصد قبل از ارزش در معرض ریسک متوسط گرفته شود. یکی دیگر از شاخص‌های ریسک که در این مطالعه در بهینه‌سازی به همراه میانگین و میانه استفاده خواهد شد شاخص حداکثر زیان (ML) است که در واقع کوچکترین مقدار یا کمینه بازده سبد مشاهده شده را نشان می‌دهد (Rockafellar & Uryasev, 2000). البته در انتخاب شاخص ریسک در این مطالعه محدودیت وجود داشت چون ازآنجایی‌که این مدل‌ها برنامه‌ریزی عدد صحیح خطی (MILP) هستند، ناگزیر باید تنها از شاخص‌های ریسکی استفاده شود که قابلیت فرمول‌بندی به صورت قیدهای صحیح را دارند تا به این صورت بتوان آن‌ها را با برنامه‌ریزی خطی انجام داد.

۳- روش‌شناسی پژوهش

در بخش پیشین به مشکلات نظریة مدرن پورتفو اشاره و چنین مطرح شد که یکی از راهکارهایی که مطالعات مختلف برای رفع این مشکلات ارائه داده‌اند استفاده از میانة مقادیر بازده به‌جای میانگین در بهینه‌سازی است. با این وجود، استفاده از میانه به‌جای میانگین در بهینه‌سازی با وجود مزیت آن در متنوع‌سازی، کنترل ریسک و عدم وابستگی نسبت به داده‌های پرت، به دلیل سختی‌های محاسباتی همچنان کاربرد محدودی دارد. به‌همین دلیل، این بخش از مقاله در ابتدا به مدلسازی انواع مختلفی از بهینه‌سازی‌های میانه یا میانگین در کنار شاخص‌های مختلف ریسک اختصاص دارد. پس از آشنایی با مدل‌های مختلفی که قرار است در بهینه‌سازی استفاده شوند، در ادامه به چگونگی مقایسه بین این مدل‌های مختلف پرداخته خواهد شد و شاخص‌هایی برای ارزیابی عملکرد آنها معرفی خواهد گردید. مجموع این دو در نهایت روش‌شناسی پژوهش که موضوع این بخش است را تشکیل می‌دهند.

۳-۱- مدل‌های بهینه‌سازی میانه یا میانگین در کنار شاخص‌های مختلف ریسک

مدل‌های بهینه‌سازی میانه و میانگین بازده سبد در کنار شاخص‌های مختلفی از ریسک می‌تواند به‌کار گرفته شوند. این قسمت به تصریح ریاضی این مدل‌ها اختصاص دارد. این مدل‌ها در بخش‌های بعدی به لحاظ عملکردی مورد ارزیابی و مقایسه قرار خواهند گرفت.

۳-۲- مدل بهینه‌سازی میانگین

برای شروع می‌توان با ساده‌ترین مدل آغاز کرد. مدل بهینه‌سازی میانگین به‌دنبال بیشینه ساختن میانگین بازده سبد است و هیچ شاخصی از ریسک در آن به کار نرفته است. این مدل صرفاً به‌منظور مقایسه عملکرد میانگین با میانه استفاده خواهد شد. به‌منظور تصریح مدل $j = 1, \dots, K$ سهم را در نظر بگیرید که بازده آنها r_{ij} برای $i = 1, \dots, T$ دوره قابل مشاهده است. اگر متغیر x_j نشانگر وزن سهام j در سبد باشد می‌توان بازده کل سبد بدست آمده در هر دوره را با $z_i = \sum_{j=1}^{K} x_j r_{ij}$ نشان داد. بر این اساس مدل بهینه‌سازی میانگین بصورت زیر خواهد بود جایی که قید شده مجموع وزن‌ها برابر یک و همه وزن‌ها غیرمنفی باشند. این مدل به‌عنوان بهترین میانگین (BestMean) نام‌گذاری و در رابطه (۲) نشان داده شده است.

$$\max_{x,z}\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} z_i$$
$$S.t.\begin{cases}1.\quad z_i=\sum_{j=1}^{K} x_j r_{ij}\quad for\ all\ i=1,\dots,T\\ 2.\quad \sum_{j=1}^{K} x_j=1\\ x_j\geq 0\quad for\ every\ j=1,\dots,K\end{cases} \tag{۲}$$

۳-۳- مدل بهینه‌سازی میانه

مدل بهینه‌سازی میانه به بیشینه‌سازی میانه بازده سبد می‌پردازد بدون اینکه هیچ شاخصی از ریسک در آن بکار گرفته شود. این مدل نیز صرفاً به منظور مقایسه عملکردی با میانگین استفاده خواهد شد. برای پیاده‌سازی مدل ابتدا نیاز است تا میانه در مدل تعریف شود. برای این منظور بازده سبد در هر دوره که با z_i نمایش داده می‌شود را بصورت صعودی مرتب کرده و از پایین‌ترین بازده شمارش کرده تا به بازده میانه برسیم. بازده میانه را با z^{Med} تعریف کرده و برای شمارش از متغیر باینری y_i استفاده خواهد شد. اگر بازده سبد از z^{Med} کمتر بود این متغیر باینری شمارنده رقم یک را به خود می‌گیرد، اما برای کنترل z^{Med} یا به عبارتی برای اطمینان از این که دقیقاً در میانه مشاهدات قرار می‌گیرد لازم است تا مجموع شمارنده‌ها به نصف مشاهدات محدود شود. این مهم با توجه به دو قید (۳) انجام می‌شود جایی که مجموع متغیر باینری شمارشگر به جزء صحیح نصف مشاهدات $\left[\frac{T+1}{2}\right]$ مقید شده است.

$$y_i=1\quad =>\quad z^{Med}\geq z_i$$
$$\sum_{i=1}^{T} y_i=\left[\frac{T+1}{2}\right] \tag{۳}$$

البته قید نخست شرطی است که لازم است به صورت خطی بازنویسی شود. می‌توان نشان داد که این قید شرطی با قید خطی$z^{Med}\geq z_i-M(1-y_i)$ برابر می‌باشد جایی که M یک مقدار بزرگ مثبت است. اگر $y_i=1$ باشد قید شرطی نخست برقرار بوده و در صورتی هم که $y_i=0$ باشد این قید با توجه به مقدار بزرگ M یک قید زائد خواهد بود. یک نکته دیگر این که چون مسئله بیشینه‌سازی است می‌توان مطمئن بود که این قید هیچگاه به صورت اکید برقرار نخواهد شد. با افزودن دو قید دیگر یعنی نامنفی بودن وزن هر سهام و مجموع وزن‌ها برابر یک، مدل بهینه‌سازی میانه به صورت زیر کامل می‌شود. همانطور که می‌توان دید این مدل نسبت به مدل بهینه‌سازی میانگین پیچیده‌تر است. برای تعریف و محاسبه میانه در این مدل T متغیر باینری و یک متغیر پیوسته جدید و $T+1$ قید

به مدل افزوده شده و از این جهت یک مدل بهینه‌سازی عددصحیح خطی (*MILP*) است که حل آن برای تعداد مشاهدات زیاد دشوار و نیاز به روش‌های ابتکاری دارد. این مدل که در (٤) نشان داده شده در ادامه مدل بهترین میانه (BestMed) نامیده می‌شود.

$$\max_{x,z} z^{Med}$$

$$S.t.\begin{cases} 1. \quad z_i = \sum_{j=1}^{K} x_j r_{ij} \quad for\ all\ i = 1, \dots, T \\ 2. \quad z^{Med} \geq z_i - M(1 - y_i) \quad for\ every\ i = 1, \dots, T \\ 3. \quad \sum_{i=1}^{T} y_i = \left[\frac{T+1}{2}\right] \\ 4. \quad \sum_{j=1}^{K} x_j = 1 \\ \quad x_j \geq 0 \quad for\ every\ j = 1, \dots, K \\ \quad y_i \in \{0,1\} \quad for\ every\ i = 1, \dots, T \end{cases} \qquad (٤)$$

۴-۳- مدل بهینه‌سازی میانه با شاخص ریسک انحرافات مطلق (*MAD*)

کاربرد میانه در بهینه‌سازی سبد دارایی‌ها قاعدتاً نیازمند توجه به ریسک و افزودن آن به مدل است. در واقع با یک بهینه‌سازی دوهدفه روبرو هستیم. یکی از روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی دوهدفه این است که یکی از اهداف به عنوان قید در مدل گنجانده شود و نتایج و جواب‌های مسئله مقید شود به آن حد آستانه از هدف دوم که مورد نظر بوده است. در اینجا پارامتر مکان میانه است و شاخص ریسک متوسط انحرافات مطلق (MAD) که متوسط قدرمطلق انحرافات بازده سبد z_i از میانه z^{Med} را اندازه می‌گیرد و بصورت **(۵)**(۵) نشان داده شده است.

$$MAD_{Z^{Med}}(z) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left|z_i - z^{Med}\right| \qquad (۵)$$

این شاخص می‌تواند به صورت یک قید وارد مدل شود اما ابتدا باید خطی شود. برای خطی کردن قدر مطلق توجه به این نکته کافی است که اگر انحراف مثبت باشد قدر مطلق آن با خود انحراف برابر است، و در صورتی که انحراف منفی باشد قدرمطلق آن از انحراف بزرگتر می‌باشد. به عبارت دیگر، قید قدر مطلق را می‌توان به صورت دو قید در آورد که در آن قدرمطلق بزرگتر یا مساوی انحرافات مثبت و منفی است. اگر این مقدار قدرمطلق را با متغیر v_i نشان دهیم، این دو قید به صورت (٦) در می‌آید. از آنجایی که هدف می‌نیمم سازی ریسک است، این قیود هیچگاه به صورت اکید برقرار نخواهند شد.

$$\begin{aligned} v_i &\geq z_i - z^{Med} \\ v_i &\leq z^{Med} - z_i \end{aligned} \qquad (٦)$$

بر این اساس مدل بهینه‌سازی میانه با شاخص متوسط انحرافات مطلق (MAD) را خواهیم داشت که بصورت قید به مدل اضافه شده است. این مدل که در رابطه (۷) نشان داده شده در ادامه به اختصار (MedMAD) نامیده می‌شود. قیدهای سه‌گانه نخست در مدل مطابق قبل به مشخص کردن میانه بهینه مربوط است. شاخص ریسک متوسط انحرافات مطلق (MAD) به‌صورت دو قید (٤) و (٥) به مدل افزوده شده که نشان‌دهنده مقدار قدرمطلق انحرافات بازده سبد از میانه برای هر مشاهده است. متوسط این مقادیر قدرمطلق انحرافات $\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} v_i$ نیز در قید (٦) محدود شده است به یک مقدار معین v^* که در بهینه‌سازی مشخص خواهد شد. همانطور که می‌توان دید این مدل به سبب افزوده شدن قیدهای مربوط به شاخص ریسک متوسط انحرافات مطلق (MAD) نسبت به مدل‌های قبلی یعنی بهینه‌سازی میانه با T متغیر پیوسته جدید v_i و 2T+1 قید خطی جدید پیچیده‌تر است.

$$\max_{x,z} z^{Med}$$
$$S.t.\begin{cases} 1. \quad z_i = \sum_{j=1}^{K} x_j r_{ij} \quad for\ all\ i = 1, \dots, T \\ 2. \quad z^{Med} \geq z_i - M(1 - y_i) \quad for\ every\ i = 1, \dots, T \\ 3. \quad \sum_{i=1}^{T} y_i = \left\lceil \frac{T+1}{2} \right\rceil \\ 4. \quad v_i \geq z_i - z^{Med} \quad for\ all\ i = 1, \dots, T \\ 5. \quad v_i \leq z^{Med} - z_i \quad for\ all\ i = 1, \dots, T \\ 6. \quad \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} v_i \leq v^* \\ 7. \quad \sum_{j=1}^{K} x_j = 1 \\ \quad x_j \geq 0 \quad for\ every\ j = 1, \dots, K \\ \quad y_i \in \{0,1\} \quad for\ every\ i = 1, \dots, T \end{cases} \qquad (۷)$$

۵-۳- مدل بهینه‌سازی میانه با شاخص ریسک ارزش در معرض ریسک (*VaR*)

در ارتباط با مفهوم ارزش در معرض ریسک (VaR) گفته شد که دامنه پایین توزیع بازده مطلوب نیست؛ افراد بسته به شرایط خود α درصد پایین توزیع را به هیچ وجه نمی‌پذیرند یا تحمل زیان آن را ندارند. برای اعمال این قید در بهینه‌سازی به این صورت عمل می‌شود که مقدار بازده متناظر با α درصد را بدست آورده و بهینه‌سازی نسبت به آن مقید می‌شود که بازده سبد z_i هیچگاه از آن پایین‌تر نباشد. به‌عبارت دیگر، ارزش در معرض ریسک α درصد

مطابق (۸) برابر است با بیشترین مقداری که احتمال رخداد بازده‌های کوچکتر از آن حدأکثر به اندازه α باشد.

$$VaR_\alpha(z) = \max\{t|\Pr[z_i \leq t] \leq \alpha\} \quad (۸)$$

برای خطی سازی این قید نیز مانند میانه عمل کرده به این معنی که یک متغیر باینری w_i تعریف و سپس از پایین دامنه توزیع به اندازه α مشاهده را شمارده و کنار می‌گذاریم تا به مقدار بازده در معرض ریسک z^{VaR} برسیم. این مهم با دو قید رابطه (۹) انجام خواهد پذیرفت.

$$w_i = 1 \quad => \quad z^{VaR} \geq z_i \quad (۹)$$
$$\sum_{i=1}^{T} w_i = [\alpha T]$$

البته نیاز است تا قید نخست به صورت خطی بازنویسی شود. این قید شرطی با قید خطی $z^{VaR} \geq z_i - N(1-w_i)$ برابر می‌باشد جایی که N یک مقدار بزرگ مثبت است. اگر $w_i = 1$ باشد قید شرطی نخست برقرار بوده و در صورتی هم که $w_i = 0$ باشد این قید با توجه به مقدار بزرگ N یک قید زائد خواهد بود. اکنون می‌توان این قیدها را به مدل افزود و مدل چهارم یعنی مدل بهینه‌سازی میانه با شاخص ارزش در معرض ریسک (VaR) را بصورت رابطه (۱۰) نوشت. سه قید نخست مطابق قبل به مشخص کردن میانه در مدل مربوط است. قید (٤) و (٥) هم همانطور که گفته شد برای مشخص کرد ارزش در معرض ریسک بکار گرفته شده است. و اما قید (٦) نیز مقدار مورد نظر از ارزش در معرض ریسک را به عنوان قید در مدل وارد می‌کند. این قید در واقع بیان می‌کند که بهینه‌سازی باید به گونه‌ای صورت گیرد تا ارزش در معرض ریسک α درصد آن از یک مقدار معین z^* کمتر نباشد. این پایین‌ترین ارزش در معرض خطری است که تحمل پذیرش آن وجود دارد. اما علاوه بر این باید رابطه دو متغیر باینری تعریف شده نیز در مدل مشخص گردد که این مهم در قید (۷) انجام شده است. از آنجایی که y_i برای مشخص کردن میانه در نظر گرفته شده بود در ۵۰ درصد موارد مشاهده شده مقدار یک به خود می‌گیرد. اما w_i صرفاً برای شمارش α درصد پایین توزیع و کنار گذاشتن آن به کار می‌رود که معمولاً بسیار کوچکتر در حد ۵ درصد در نظر گرفته می‌شود. از این رو می‌توان گفت که $w_i \leq y_i$ همواره برقرار است. قیدهای بعدی نیز مطابق قبل بیان می‌کنند که وزن‌ها باید نامنفی و مجموع آن‌ها برابر یک

باشد. این مدل که در ادامه (MedVaR) نامیده می‌شود بطور کل نسبت به مدل دوم یعنی بهینه‌سازی میانه به‌اندازه T متغیر باینری و یک متغیر پیوسته جدید، و 2T+2 قید جدید به آن افزوده شده و بر این اساس پیچیده‌ترین مدلی است که به کار گرفته خواهد شد.

$$\max_{x,z} z^{Med}$$

$$S.t.\begin{cases} 1. \quad z_i = \sum_{j=1}^{K} x_j r_{ij} \quad for\ all\ i = 1,\dots,T \\ 2. \quad z^{Med} \geq z_i - M(1-y_i) \quad for\ every\ i = 1,\dots,T \\ 3. \quad \sum_{i=1}^{T} y_i = \left\lceil \frac{T+1}{2} \right\rceil \\ 4. \quad z^{VaR} \geq z_i - N(1-w_i) \quad for\ every\ i = 1,\dots,T \\ 5. \quad \sum_{i=1}^{T} w_i = [\alpha T] \\ 6. \quad z^{VaR} \geq z^* \\ 7. \quad w_i \leq y_i \quad for\ every\ i = 1,\dots,T \\ 8. \quad \sum_{j=1}^{K} x_j = 1 \\ x_j \geq 0 \quad for\ every\ j = 1,\dots,K \\ y_i \in \{0,1\} \quad for\ every\ i = 1,\dots,T \\ w_i \in \{0,1\} \quad for\ every\ i = 1,\dots,T \end{cases} \qquad (۱۰)$$

۶-۳- مدل بهینه‌سازی میانه با شاخص ریسک متوسط ارزش در معرض ریسک (*CVaR*)

انتقادات مختلفی بر شاخص ارزش در معرض ریسک (VaR) وارد می‌شود که یکی از مهمترین آنها آنچنان که مطرح شد این واقعیت است که مقادیر α درصد سمت چپ توزیع هر چقدر هم که مقادیر زیان بزرگ و قابل توجهی باشند، نادیده گرفته می‌شوند. یکی دیگر از اشکالات هم این است که برای مدلسازی آن به‌صورت خطی نیاز است به تعداد مشاهدات، متغیر باینری به مدل وارد شود که قاعدتاً به پیچیدگی مدل می‌افزاید. بنابراین، در این قسمت به مدلسازی شاخص ریسک دیگر یعنی متوسط ارزش در معرض ریسک (CVaR) پرداخته خواهد شد.

برای محاسبه متوسط ارزش در معرض ریسک (CVaR) گام نخست محاسبه ارزش در معرض ریسک (VaR) است. در گام دوم و برای محاسبه متوسط مقادیر کوچکتر از ارزش در معرض ریسک (VaR) ابتدا یک متغیر جدید برابر قدرمطلق فاصله مقادیر مشاهده شده از z^{VaR} تعریف و آن را با $d_i = \max\{-z_i + z^{VaR}, 0\}$ نمایش می‌دهیم. متوسط این مقادیر

مطلق فواصل نیز بنابراین برابر $z^{VaR}-\frac{1}{\alpha T}\sum_{i=1}^{T} d_i$ خواهد بود. البته تعریف d_i به شکل ماکزیمم نیاز است تا مجدداً بصورت خطی بازنویسی شود. این مهم نیز با دو قید صورت می‌گیرد یعنی این شرط در مدل گنجانده می‌شود که متغیر d_i از هر دو $-z_i+z^{VaR}$ و 0 بزرگتر باشد. تمام این قیود در مجموعه مدل بهینه‌سازی میانه با شاخص متوسط ارزش در معرض ریسک (CVaR) در رابطه (۱۱) در زیر نشان داده شده است.

$$\max_{x,z} z^{Med}$$

$$S.t.\begin{cases} 1.\quad z_i=\sum_{j=1}^{K} x_j r_{ij} \quad for\ all\ i=1,\dots,T \\ 2.\quad z^{Med}\geq z_i-M(1-y_i) \quad for\ every\ i=1,\dots,T \\ 3.\quad \sum_{i=1}^{T} y_i=\left\lceil\frac{T+1}{2}\right\rceil \\ 4.\quad z^{VaR}-\frac{1}{\alpha T}\sum_{i=1}^{T} d_i\geq D^* \\ 5.\quad d_i\geq -z_i+z^{VaR} \quad for\ every\ i=1,\dots,T \\ 6.\quad d_i\geq 0 \quad for\ every\ i=1,\dots,T \\ 7.\quad \sum_{j=1}^{K} x_j=1 \\ x_j\geq 0 \quad for\ every\ j=1,\dots,K \\ y_i\in\{0,1\} \quad for\ every\ i=1,\dots,T \end{cases} \tag{۱۱}$$

سه قید ابتدایی مانند قبل به مشخص کردن میانه مرتبط است. قید (٤)همان متوسط ارزش ریسک در معرض خطر (CVaR) است که به یک مقدار معین D* مقید شده و نباید از آن کمتر باشد. دو قید (٥) و (٦) همانطور که توضیح داده شد مقدار مطلق فاصله ارزش سبد از z^{VaR} را مشخص می‌کنند. و در نهایت قیدهای پایانی که مانند قبل شرط نامنفی بودن وزن‌ها و مجموع برابر یک آنها را بیان می‌دارد. بطور کلی این مدل که در ادامه (MedCVaR) نامیده می‌شود نسبت به مدل دوم یعنی بهینه‌سازی میانه به اندازه T+1 متغیر پیوسته جدید و 2T+1 قید جدید اضافه دارد.

۷-۳- مدل بهینه‌سازی میانه با شاخص ریسک حدأکثر زیان

یکی دیگر از شاخص‌ها که به دامنة پایین توزیع مقادیر بازده توجه دارد، شاخص حدأکثر زیان (ML) است. مدلسازی این شاخص به بسیار آسان بوده و به‌عبارتی کافی است فقط یک مقدار معین در نظر گرفته شده و قید شود که بازده سبد z_i از این مقدار حدأقلی تعیین

شده بیشتر باشد. این مدل که در رابطه (۱۲) نمایش داده شده است در مقایسه با مدل بهینه‌سازی میانه تنها T قید اضافه دارد. این مدل در ادامه مدل (MedMax) نامیده می‌شود.

(۱۲)

$$\max_{x,z} z^{Med}$$
$$S.t.\begin{cases} 1. \quad z_i = \sum_{j=1}^{K} x_j r_{ij} \quad for\ all\ i = 1, \dots, T \\ 2. \quad z^{Med} \geq z_i - M(1 - y_i) \quad for\ every\ i = 1, \dots, T \\ 3. \quad \sum_{i=1}^{T} y_i = \left\lceil \frac{T+1}{2} \right\rceil \\ 4. \quad z_i \geq G^* \quad for\ all\ i = 1, \dots, T \\ 5. \quad \sum_{j=1}^{K} x_j = 1 \\ x_j \geq 0 \quad for\ every\ j = 1, \dots, K \\ y_i \in \{0,1\} \quad for\ every\ i = 1, \dots, T \end{cases}$$

۸-۳- مدل بهینه‌سازی میانگین با شاخص ارزش در معرض ریسک (*CVaR*)

به‌منظور مقایسه بهتر میانگین و میانه در بهینه‌سازی و در کنار مدل اول که بیشینه‌سازی میانگین بود بدون هیچ شاخصی از ریسک، در این مدل از شاخص متوسط ارزش در معرض ریسک (CVaR) در کنار هدف بیشینه‌سازی میانگین استفاده خواهد شد. این دو مدل قابلیت‌های مدل‌های میانگین بهینه را در هر دو حالت بدون ریسک و با توجه به ریسک نشان خواهد داد و مقایسه بین میانگین و میانه در بهینه‌سازی را راحت‌تر می‌سازد. مفهوم متوسط ارزش در معرض ریسک و مدل‌سازی آن به صورت قیدهای خطی پیش از این توضیح داده شد، با افزودن همان قیود به مدل میانگین بهینه می‌توان مدل مورد نظر را بصورت رابطه (۱۳) در زیر نوشت. این مدل در ادامه مدل (MeanCVaR) نامیده می‌شود.

(۱۳)

$$\max_{x,z} \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} z_i$$
$$S.t.\begin{cases} 1. \quad z_i = \sum_{j=1}^{K} x_j r_{ij} \quad for\ all\ i = 1, \dots, T \\ 2. \quad z^{VaR} - \frac{1}{\alpha T}\sum_{i=1}^{T} d_i \geq D^* \\ 3. \quad d_i \geq -z_i + z^{VaR} \quad for\ every\ i = 1, \dots, T \\ 4. \quad d_i \geq 0 \quad for\ every\ i = 1, \dots, T \\ 5. \quad \sum_{j=1}^{K} x_j = 1 \\ x_j \geq 0 \quad for\ every\ j = 1, \dots, K \end{cases}$$

۳-۹- چگونگی ارزیابی و مقایسه مدل‌ها

پنج مدل‌بهینه‌سازی با تابع هدف بیشینه‌سازی میانه و شاخص‌های مختلف ریسک ارائه شد. از میان این مدل‌ها می‌توان گفت که مدل بهینه‌سازی میانه با شاخص ریسک انحرافات مطلق (MedMAD) نزدیکترین آنها به مدل مارکویتز است که تنها در آن میانه به‌جای میانگین و شاخص ریسک انحرافات مطلق (MAD) به جای واریانس استفاده شده است. سایر مدل‌ها از شاخص‌های ریسکی استفاده کرده‌اند که مبتنی بر مقادیر بدترین حالت و دامنهٔ پایین توزیع می‌باشد. از نظر محاسباتی نیز می‌توان به‌راحتی دید که مدل بهینه‌سازی میانه با شاخص ریسک حدأکثر زیان (MedMax) آسان‌ترین است چرا که کمترین قید را به مدل تحمیل می‌کند. و در مقابل مدل بهینه‌سازی میانه با شاخص ارزش در معرض ریسک (MedVaR) نیز به لحاظ محاسباتی بیشترین بار را تحمیل می‌کند چرا که در آن دو نوع متغیر باینری به ازاء هر مشاهده بکار رفته است. اگر تعداد مشاهدات بالا باشد، این مدل می‌تواند به شدت غیرقابل استفاده گردد. نتایج بدست آمده از بکارگیری میانه در بهینه‌سازی این مدل‌ها، سپس با سه الگوی دیگر مقایسه خواهند شد. نخستین الگوی جایگزین مقایسه‌ای مدل بهینه‌سازی میانگین است. از آنجایی که در این مدل هیچ شاخصی از ریسک در نظر گرفته نشده نتایج آن غیرواقعی خواهد بود، اما به هر حال به منظور نشان دادن تفاوت‌های میانه و میانگین از آن استفاده خواهد شد. دومین الگو نیز مدل بهینه‌سازی میانگین با شاخص ارزش در معرض ریسک (MeanCVaR) است. در سومین و آخرین

الگوی مقایسه‌ای که مدل وزن‌های یکسان (EqW) نامیده می‌شود نیز از وزن‌های یکسان $x_j = \frac{1}{K}$ برای سهام‌ها استفاده شده است.

به‌منظور مقایسه و آزمون مدل‌ها با داده‌های واقعی از قیمت پایانی روزانه سهام بیست[۳۳] شرکت ثبت شده در بورس ایران از ابتدای سال ۲۰۱٦ (دی ۱۳۹٤) تا انتهای سال ۲۰۱۹ (دی ۱۳۹۸) استفاده شده است. دلیل بررسی این تعداد شرکت در این مطالعه در واقع محدودیت محاسباتی بوده است. همانطور که پیش از این به جزئیات مدل‌های مختلف پرداخته شد، در برخی از مدل‌ها لازم بود به تعداد مشاهدات و متغیرها قید به مدل اضافه شود که می‌تواند به سرعت حل آن را غیر ممکن سازد. انتخاب این بیست شرکت نیز به صورت تصادفی و البته به شرط داشتن بیش از یک دهه سابقه بورسی صورت گرفته است. ملاک قرار دادن سابقه بورسی باعث شد تا مشکل عدم گزارش قیمت در برخی روزها به حدأقل برسد و به نوعی این سهام کمترین روزهای بدون معامله را داشته‌اند. با استفاده از قیمت‌های پایانی، اطلاعات بازده روزانه این سهام‌ها استخراج شده است. شیوه کار به این صورت است که ابتدا هر یک از این مدل‌ها در بهینه‌سازی سبد برای دوره معین پنجاه روزه به‌کار گرفته شده و وزن‌های بهینه محاسبه می‌شوند، سپس این وزن‌ها برای دوره پنجاه روزه بعدی ثابت در نظر گرفته شده و پس از آن یک سبد دیگر محاسبه می‌شود. به عبارت دیگر، سبد بهینه ابتدای سال ۲۰۱٦ برای اساس اطلاعات ۵۰ روز گذشته آن محاسبه شده و سپس بازده سبد با این وزن‌ها برای دوره پنجاه روز بدست آمده است. بعد از گذران این دوره، سبد جدید مجدداً با استفاده از اطلاعات گذشته محاسبه شده و برای کسب بازده در پنجاه روز بعدی بکار می‌رود. با استفاده از این استراتژی پنجره غلطان[۳٤] تعداد مشاهداتی که در هر دوره در بهینه‌سازی استفاده می‌شود محدود به ۵۰ مشاهده است و این به دلیل پیچیده بودن مدل‌ها و عدم امکان بکارگیری تعداد مشاهدات زیاد، در بهینه‌سازی از استفاده شده است.

[۳۳] این بیست شرکت عبارتند از مخابرات ایران، بیمه البرز، تراکتورسازی ایران، شرکت کارتُن ایران، سایپا، سیمان سپاهان، کربن ایران، صنایع آذرآب، آلومینیوم‌سازی ایران، فولاد مبارکه، قند ثابت خراسان، معدنی و صنعتی چادرملو، نفت بهران، ماشین‌سازی اراک، فرآوری مواد معدنی ایران، لوله و ماشین‌سازی ایران، کاشی سینا، ذغال سنگ نگین طبس، معدنی و صنعتی گل‌گهر و بانک ملت.

[34] Rolling window

در نهایت مقادیر متوسط و توزیع چندک‌های بازده سبدهای بهینه بدست آمده از مدل‌های مختلف طبق این استراتژی مورد مقایسه قرار خواهند گرفت. البته مقایسه مدل‌های میانه و میانگین با شاخص‌های مختلف ریسک صرفاً محدود به مقایسه بازده‌های بدست آمده نیست و علاوه بر آن عملکرد مدل‌ها در متنوع‌سازی سبد نیز بررسی خواهد شد. برای متنوع‌سازی نیز از دو معیار استفاده خواهد شد. معیار هرفیندهال-هیرشمن[۳۵] (HH) که مجموع مجذور وزن‌های سبد است. و دوم معیار MAX که در واقع ماکزیمم وزن اختصاص یافته در میان سهام‌های سبد است. این دو معیار در رابطه (۱٤) نشان داده شده‌اند، جایی که متغیر x_{it} وزن سهام‌ها در دوره یا زمان t است.

$$HH_t(x) = \sum_{i=1}^{K} x_{it}^2$$
$$MAX_t(x) = \max\{x_{it} | i = 1, \dots, K\} \quad (۱٤)$$

مقدار حدأکثر هر دو معیار برابر یک خواهد بود. به عبارت دیگر، وقتی که سبد اصلاً متنوع‌سازی نشده باشد و تمام ثروت به یک سهام اختصاص یافته باشد این دو معیار مقدار حدأکثر یک را به خود می‌گیرند. مدل بهینه‌سازی میانگین بدون هیچ شاخص ریسک (BestMean) از آنجایی که سهام با بالاترین متوسط بازده را انتخاب کرده و تمام ثروت را به آن اختصاص می‌دهد، بنابراین سقف این دو معیار را بدست خواهد آورد. اما با متنوع‌سازی سبد و اختصاص بخشی از ثروت به دیگر سهام‌ها، هر دو معیار هرفیندهال-هیرشمن (HH) و MAX کاهش خواهند یافت. عدد کوچکتر این دو معیار به معنی متنوع‌سازی بیشتر است. و اما حدأقل یا کف این دو معیار وقتی است که به همه سهام‌ها یک وزن یکسان داده شود. در سبد یکنواخت با وزن‌های یکسان مقدار این دو معیار برابر $HH(x) = MAX(x) = 1/k$ است و اگر به یکی از سهام‌ها وزن بیشتری اختصاص یابد هر دو این معیارها افزایش خواهند یافت. بنابراین می‌توان گفت از نظر متنوع‌سازی مدل‌های مختلف بین سبد یکنواخت (EqW) و سبد میانگین بهینه بدون هیچ شاخصی از ریسک (BestMean) قرار دارند.

البته پیش از بکارگیری مدل‌ها و ارائه نتایج یکسری پارامترها نیز در مدل‌های ارائه شده در بخش قبل وجود داشت که باید مشخص گردند. نخست این که در مدل‌هایی که ارزش در معرض ریسک (VaR) یا متوسط ارزش در معرض ریسک (CVaR) به عنوان

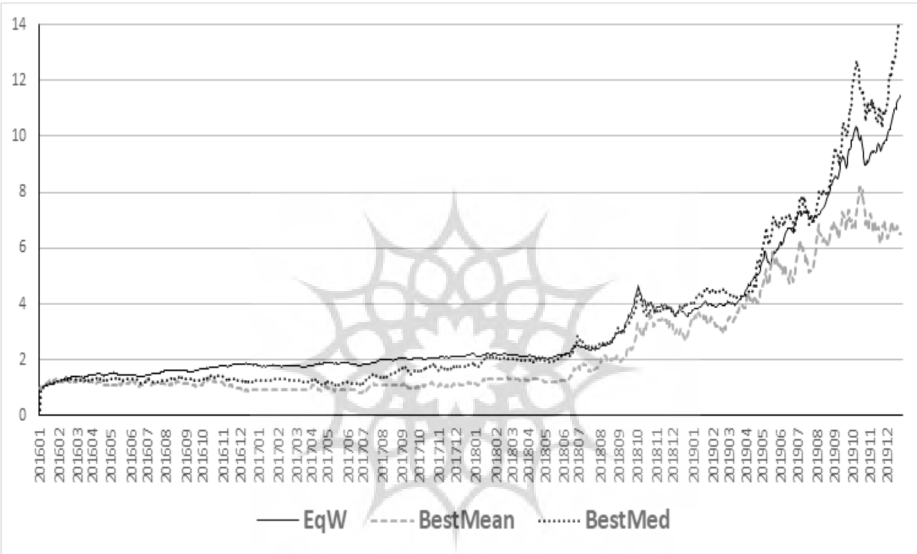
---
[35] Herfindahl-Hirschman

شاخص ریسک مورد استفاده قرار گرفته، پیش از بکارگیری مدل باید پارامتر α تعیین گردد. پارامتر α در واقع درصدی از توزیع است که بسته به نظر سرمایه‌گذار باید کنار گذاشته شود. در این مقاله از $\alpha=0.25$ برای مدل‌های با شاخص ارزش در معرض ریسک (VaR) و از $\alpha=0.1$ برای مدل‌های با شاخص متوسط ارزش در معرض ریسک (CVaR) استفاده خواهد شد. علت کوچکتر بودن α در مدل‌های با شاخص متوسط ارزش در معرض ریسک (CVaR) این است که این شاخص مقادیر بدتر از ارزش در معرض ریسک را نیز در نظر می‌گیرد و بنابراین ماهیتاً نسبت به ارزش در معرض ریسک (VaR) محتاطانه‌تر است. به‌عبارت دیگر، مقادیر در نظر گرفته شده برای α بهترین نیستند چرا که اصولاً مفاهیم و مقادیر ذهنی هستند که برای سرمایه‌گذاران متفاوتند، بلکه صرفاً بسته به مسئله و مدل‌های در دست بررسی به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که مدل‌ها به یک اندازه محتاطانه باشند. اما علاوه بر این‌ها، یکسری مقادیر آستانه‌ای پذیرش ریسک نیز در مدل‌های بالا در نظر گرفته شد که آنها نیز باید پیش از بکارگیری مدل‌ها مشخص شوند. تمامی این مقادیر بر اساس عملکرد پنجاه روز گذشته پورتفو با وزن‌های یکسان بدست آمده است. به عبارت دیگر، اگر $r^{T\times K}$ ماتریس مقادیر بازده مشاهده شده در گذشته باشد که از آن برای محاسبه بازده سبد با وزن‌های یکسان $u_i = \left(\frac{1}{K}\right)\sum_{i=j}^{K} r_{ij}$ استفاده شده، در آن صورت در رابطه (۳) یعنی مدل بهینه‌سازی میانه با شاخص ریسک انحرافات مطلق $v^* = MAD(u)$، در رابطه (٤) یعنی مدل بهینه‌سازی میانه با شاخص ارزش در معرض ریسک $z^* = VaR(u)$، در رابطه (۵) یعنی مدل بهینه‌سازی میانه با شاخص متوسط ارزش در معرض ریسک $D^* = CVaR(u)$، در رابطه (٦) یعنی بهینه‌سازی میانه با شاخص ریسک حداکثر زیان $G^* = min(u)$ و در رابطه (۷) یعنی مدل بهینه‌سازی میانگین با شاخص متوسط ارزش در معرض ریسک نیز $D^* = CVaR(u)$ است. به عبارت دیگر در بهینه‌سازی سبدهای دارایی در مدل‌های بالا، از ریسکی که در سبد الگو با وزن‌های یکسان در دوره گذشته تجربه شده به عنوان مقادیر آستانه‌ای استفاده می‌شود.

۴- یافته‌ها و نتایج پژوهش

در بررسی نتایج ابتدا به مقایسه عملکرد مدل‌های بهینه‌سازی میانگین (BestMean) و بهینه‌سازی میانه (BestMed) بدون توجه به شاخص‌های ریسک پرداخته خواهد شد. عملکرد این دو مدل با استراتژی منفعلانه سبد با وزن‌های یکسان (EqW) سنجیده خواهد

شد. نتایج حاصل از پیاده‌سازی این مدل‌ها با داده‌های بیست شرکت بورسی ایران در **شکل ۳** نشان داده شده است. این نمودار با فرض ارزش اولیه یک واحدی سبد در روز نخست، مقدار انباشته مقادیر بازده را در طی زمان از ابتدای سال ۲۰۱٦ (دی ۱۳۹٤) تا انتهای سال ۲۰۱۹ (دی ۱۳۹۸) به تصویر می‌کشد.



شکل ۳. مقایسه عملکرد دو مدل میانه بهینه و میانگین بهینه با استراتژی منفعل سبد یکنواخت
مأخذ: محاسبات تحقیق

Figure 3. Comapring the performance of optimal mean and median models with the passive strategy of EqW
Source: Author's Computation

همانطور که می‌توان دید مدل میانگین بهینه ازآنجایی‌که هیچ شاخص ریسکی در آن به کار نرفته و سبدی بدست می‌دهد که اصلا متنوع‌سازی‌نشده عملکرد ضعیفی از خود نشان می‌دهد. به عبارت دیگر، مدل میانگین بهینه اگرچه بازده گذشته را بیشینه کرده اما سبد بهینه آن به دلیل اینکه اصلاً متنوع‌سازی نشده نتوانسته در کسب بازده برای روزهای آتی موفق باشد. این مدل حتی از استراتژی منفعل سبد یکنواخت نیز عملکرد پایین‌تری دارد. در مقابل مدل میانه بهینه حتی بدون وارد کردن قیدهای ریسک عملکرد بهتری نسبت به

میانگین و سبد یکنواخت دارد. پس از این مقایسه می‌توان شاخص‌های مختلف ریسک را وارد مدل کرد و این بار به صورت واقعی‌تر به مقایسه مدل‌ها پرداخت.

جدول ۱ بازده سبدهای حاصل از مدل‌های مختلف را مقایسه می‌کند. توزیع بازدهی که از این مدل‌ها بدست آمده در چارک‌های مختلف نشان داده شده است. ستون نخست مقدار حداقل و ستون آخر حدآکثر بازدهی است که از بکارگیری این مدل‌ها بدست آمده است. در مقایسه عملکرد میانه یا میانگین در بهینه‌سازی دو نکته مشخص قابل ذکر است. نخست این که در میان مقادیر ماکزیمم، بیشترین مقدار حدود ۱۹/۹ درصد متعلق است به مدل میانگین بهینه و در میان مقادیر می‌نیمم نیز کمترین مقدار ٦/٧- درصد نیز متعلق به مدل میانگین بهینه است. به عبارت دیگر مدل میانگین بهینه با دامنه [-0.067, 0.199] دارای پراکنده‌ترین توزیع است. به طور مشابه می‌توان دید که مدل منفعلانه سبد یکنواخت نیز با دامنه [-0.036, 0.044] کمترین طول توزیع بازده را داراست. مدل میانه بهینه نیز در بازه [-0.061, 0.15] توزیع شده است که بین این دو قرار دارد. شکل ٤ نیز توزیع فراوانی بازده این مدل‌ها را به تصویر کشیده است. در این نمودار نیز می‌توان دید که سبد میانگین بهینه دنباله‌های پهنی دارد که نشانگر ریسک بالای این مدل است. در مقابل مدل میانه بهینه با وجود این که هیچ شاخصی از ریسک در آن بکار نرفته در کنترل ریسک عملکرد بسیار بهتری داشته و توزیع آن متمرکزتر است. نکته دوم این که میانه بهینه در حداقل بازده حدوداً ٠/٦ درصد زیان کمتر، در چارک اول (ستون دوم جدول) ۰/۵ درصد زیان کمتر، در میانه ۰/۱۲ درصد سود بیشتر و در میانگین ۰/۰۵ درصد سود بیشتر بدست داده است. تنها در چارک سوم است که میانگین بهینه حدود ۰/۲۵ درصد بیشتر سود داده است. به عبارت دقیق‌تر، مدل میانه بهینه در ۷۱ درصد موارد نتیجه بهتری در مقایسه با مدل میانگین بهینه به‌دست داده است. مدل میانگین بهینه تنها در ۲۹ درصد انتهای بازه عملکرد بهتری داشته است.

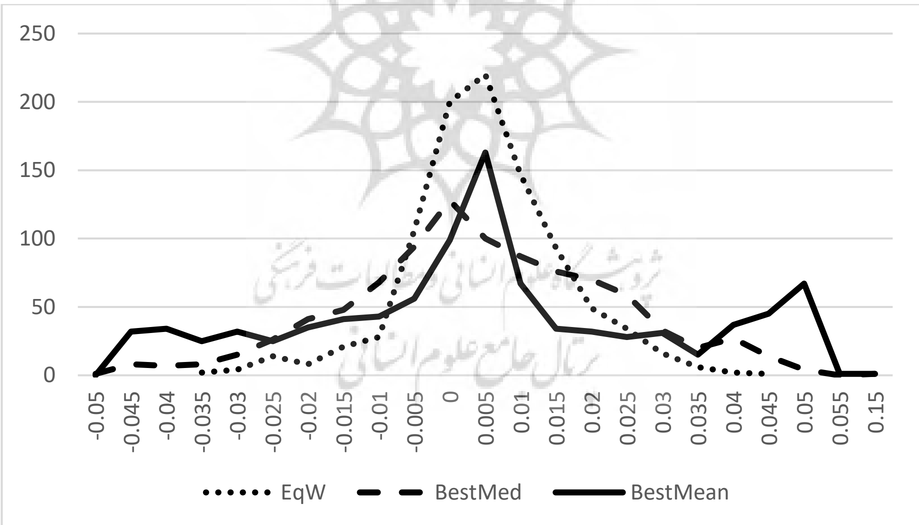
جدول ۱. مقایسه توزیع بازده مدل‌های مختلف با داده‌های بورسی ایران

مآخذ: محاسبات تحقیق

Tabel 1. Return distributions of various models using Iran's stock exchange market's data

Source: Author's Computation

	Min	1st Q	Median	Mean	3rd Q	Max
EqW	-۰/۰۳۶	-۰/۰۰۳۶	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۸۶	۰/۰۴۳۸
BestMean	-۰/۰۶۷۳	-۰/۰۱۳۹	۰	۰/۰۰۲۵	۰/۰۱۸۴	۰/۱۹۹۱
BestMed	-۰/۰۶۱۳	-۰/۰۰۹۲	۰/۰۰۱۲۸	۰/۰۰۲۹۹	۰/۰۱۵۹	۰/۱۵
MeanCVaR	-۰/۰۴۸	-۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۱۴۸	۰/۰۰۲۷۵	۰/۰۱۰۹	۰/۱۲۷
MedCVaR	-۰/۰۴۹۳	-۰/۰۰۵۷۶	۰/۰۰۲۴۲	۰/۰۰۲۶۶	۰/۰۱۱۶	۰/۰۷۱۸۵
MedVaR	-۰/۰۶۱۳	-۰/۰۰۹۲	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۲۷۲	۰/۰۱۵۱	۰/۱۵
MedMax	-۰/۰۵۳۶	-۰/۰۰۹۴	۰/۰۰۱۵۷	۰/۰۰۲۴۳	۰/۰۱۵۱	۰/۰۸۱۸
MedMAD	-۰/۰۴۸۹	-۰/۰۰۴۹	۰/۰۰۲۱۷	۰/۰۰۲۷۸	۰/۰۱۰۴	س۰/۱۳۶۳



شکل ٤. مقایسه فراوانی بازده سبدهای میانگین بهینه، میانه بهینه و سبد یکنواخت بدون بکارگیری شاخص ریسک

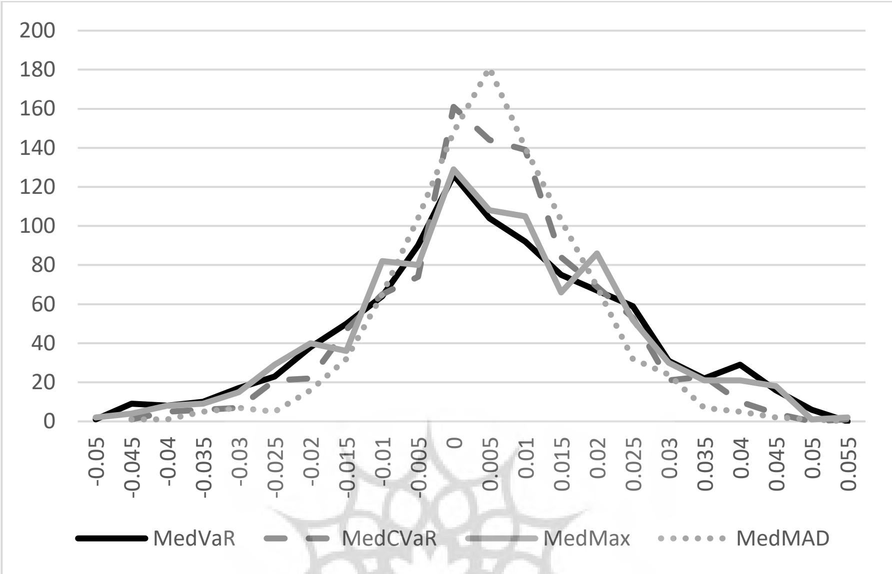
مأخذ: محاسبات تحقیق

Figure 4. Comapring return frequencies of optimal mean, median and EqW models without any control of risk

Source: Author's Computation

مقایسه بین میانه و میانگین را می‌توان این‌بار با لحاظ شاخص‌های ریسک ادامه داد. با مقایسه دو مدل میانگین بهینه با شاخص ریسک متوسط ارزش در معرض ریسک (MeanCVaR) و میانه بهینه با شاخص ریسک ارزش در معرض ریسک (MedCVaR) که در هر دو α=0.1 برای شاخص ریسک منظور شده، می‌توان همچنان به عملکرد بهتر میانه پی‌برد. مدل (MeanCVaR) با حدأقل بازده ٤/٨- درصد و حدأکثر بازده ۱۲/۷ درصد دامنه توزیع بسیار بزرگتری دارد نسبت به مدل (MedCVaR) که در دامنه [0.072 ,0.049-] توزیع شده است. می‌توان دید که مدل میانه در چارک اول و میانه بازده‌ها عملکرد بهتری از خود نشان داده است. در واقع در ۵۲ درصد موارد مدل میانه بهینه با شاخص ریسک متوسط ارزش در معرض ریسک (MedCVaR) بازده بالاتری داشته است. البته این اختلاف بسیاری جزئی است و میانگین‌های این دو مدل تقریباً یکسان است.

می‌توان عملکرد شاخص‌های ریسک را نیز مورد محک قرار داد. مدل میانه بهینه با چهار شاخص ریسک انحرافات مطلق (MedMAD)، ارزش در معرض ریسک (MedVaR)، متوسط ارزش در معرض ریسک (MedCVaR) و حدأکثر زیان (MedMax) برآورد شده است. می‌توان با توجه به ارقام جدول در ستون‌ها حداقل بازده، چارک اول و میانه مشاهده کرد که دو شاخص ریسک متوسط ارزش در معرض ریسک (CVaR) و انحرافات مطلق (MAD) عملکرد بهتری در تمرکز توزیع و کنترل ریسک نسبت به دو شاخص دیگر داشته‌اند. مدل (MedVaR) با توزیع بازده در دامنه [0.15 ,0.061-] بیشترین پراکندگی را داشته و همانند مدل (MedMax) همانطور که در شکل ۵نشان داده شده دنباله‌های بزرگتر دارند.



شکل ۵. مقایسه توزیع بازده سبدهای میانه بهینه با شاخص‌های مختلف ریسک

مأخذ: محاسبات تحقیق

Figure 5. Comapring return distributions of optimal median model subject to several risk measures.

Source: Author’s Computation

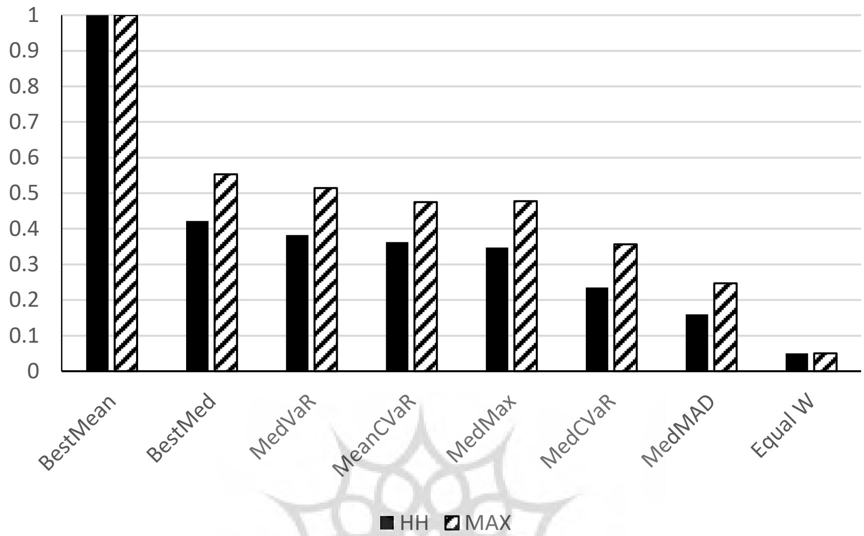
اما صرف نظر از عملکرد بهتر میانه در کسب بازده، همانطور که گفته شد یک مزیت دیگر این است که استفاده از میانه در بهینه‌سازی به جای میانگین به متنوع‌سازی بیشتر سبد منتهی می‌شود. جدول ۲ متنوع‌سازی سبد مدل‌های مختلف با دو شاخص هرفیندهال-هیرشمن و MAX را نشان می‌دهد. شکل ٦نیز همین دو شاخص را برای مدل‌های مختلف را این بار به‌صورت مرتب به تصویر کشیده است. نخستین نکته در اینجا این است که مدل میانه بهینه (BestMean) که هیچ شاخصی ریسکی در آن به کار نرفته همواره سهام با بیشترین بازده متوسط را انتخاب می‌کند و تمام سبد را به آن اختصاص می‌دهد. بنابراین اصلاً متنوع‌سازی نشده است. مقدار ۱ در دو شاخص HH و MAX دقیقاً همین نکته را نشان می‌دهد یعنی کل دارایی به یک سهم اختصاص یافته است. مدل منفعلانه سبد یکنواخت در مقابل بیشترین متنوع‌سازی را دارد و به تمام سهام‌ها یک وزن

یکسان اختصاص می‌دهد. از آنجایی که ۲۰ سهم در بهینه‌سازی استفاده شده، هر دو شاخص رقم ۰/۰۵ را به خود گرفته‌اند. بنابراین مدل میانگین بهینه و مدل سبد یکنواخت کف و سقف متنوع‌سازی را نشان می‌دهند و مدل‌های مختلف از لحاظ متنوع‌سازی بین این دو قرار کران قرار خواهند گرفت.

جدول ۲. مقایسه درجه متنوع‌سازی مدل‌های مختلف با داده‌های بورسی ایران
مآخذ: محاسبات تحقیق

Tabel 2. Comparing diversification of various models using Iran’s stock exchange market’s data
Source: Author’s Computation

	HH	MAX
Equal W	۰/۰۵	۰/۰۵
BestMean	۱	۱
BestMed	۰/۴۲۱۸	۰/۵۵۳
MeanCVaR	۰/۳۶۳	۰/۴۷۵۱
MedCVaR	۰/۲۳۵	۰/۳۵۶
MedVaR	۰/۳۸۲۲	۰/۵۱۴۵
MedMax	۰/۳۴۷	۰/۴۷۸
MedMAD	۰/۱۶	۰/۲۴۷



شکل ٦. مقایسه درجه متنوع‌سازی مدل‌های مختلف با داده‌های بورسی ایران
مأخذ: محاسبات تحقیق

Figure 6. Comapring diversification of various model using Iran’s stock exchange market’s data
Source: Author’s Computation

نکته دوم این که مدل میانه بهینه بدون هیچ قید کنترل کننده ریسک با شاخص HH=0.42 و شاخص MAX=0.55 به سطح قابل قبولی از متنوع‌سازی سبد دست یافته است. طبق شاخص MAX بالاترین وزنی که به یک سهم اختصاص یافته ۰/۵۵ بوده در حالی که در مدل میانگین بهینه این رقم ۱ بود. درجه متنوع‌سازی با در نظر گرفتن قیود کنترل‌کننده ریسک بهبود بیشتری می‌یابد. از میان شاخص‌های مختلف ریسک نیز می‌توان دید که همچنان متوسط ارزش در معرض ریسک (CVaR) و انحرافات مطلق (MAD) عملکرد بهتری نسبت به سایر شاخص‌های ریسک داشته‌اند و سبد بدست آمده در این دو تا حد بسیار خوبی متنوع‌سازی شده است.

۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

مدل بهینه‌سازی سبد سهام مارکویتز دارای نواقصی است که در ادبیات به آن زیاد پرداخته شد است. یکی از مهمترین این نواقص فرض نرمال بودن بازده سهام در بازار است. این فرض در بسیار از مطالعات رد شده است. مسئله‌ای که مورد توجه این مقاله قرار دارد این است که در صورت غیرنرمال بودن توزیع مقادیر بازده دیگر شاید میانگین شاخص خوبی برای بیشینه‌سازی نباشد. میانگین تا حد زیادی تحت تأثیر مقادیر پرت با بازده خیلی بالا قرار دارد و همین موجب شده تا برخی آن را بیشینه‌سازی خطا بنامند. بکارگیری میانه به جای میانگین در بهینه‌سازی سبد سهام یکی از راه‌حل‌هایی است که در کنار بسیاری راهکارهای دیگر پیشنهاد شده است.

در این مقاله مدل‌های مختلفی از بیشینه‌سازی میانه یا بیشینه‌سازی میانگین با شاخص‌های مختلفی از ریسک ارائه و با داده‌های واقعی بیست شرکت بورسی ایران از ابتدای سال ۲۰۱۶ (دی ۱۳۹٤) تا انتهای سال ۲۰۱۹ (دی ۱۳۹۸) مورد آزمون قرار گرفت. مهمترین نتیجه بدست آمده حاکی از عملکرد بهتر میانه از نظر بازده است. مدل بیشینه-سازی میانه در بیشتر از ۷۱ درصد موارد بازده‌های بالاتری کسب کرده و متوسط بازده سبد بهینه آن نیز بیشتر بوده است. این بدان معنی است که با بکارگیری مدل میانه بهینه و انباشت دارایی در طی زمان ارزش سبد بیشتری بدست خواهد آمد. علاوه بر این و به عنوان نتیجه دوم، مشاهده شد که مدل میانه بهینه از نظر متنوع‌سازی نیز عملکرد بسیار خوبی دارد. درجه متنوع‌سازی سبد در مدل‌های مختلفی که با قیود ریسک مختلف یا بدون آن بدست آمده نشان می‌دهد که بطور کل بهینه‌سازی میانه به جای میانگین سبد متنوع‌تری بدست خواهد داد. علاوه بر این بکارگیری شاخص‌های مختلف ریسک نیز به ما امکان داد تا عملکرد آن را از منظر کنترل ریسک و متنوع‌سازی مورد مقایسه قرار دهیم. به عنوان نتیجه سوم نیز مشاهده شد که دو شاخص متوسط ارزش در معرض ریسک (CVaR) و انحرافات مطلق (MAD) در مقایسه با دیگر شاخص‌های ریسک از لحاظ کنترل ریسک در دامنه پایین توزیع یعنی مقادیر زیان و همچنین به لحاظ متنوع‌سازی عملکرد بسیار بهتری به همراه داشته‌اند.

Acknowledgments: The authors would like to acknowledge the valuable comments and suggestions of the reviewers, which have improved the quality of this paper.

Conflict of Interest: The author declare no conflict of interest.

Funding: The author received no financial support for the research, authorship, and publication of this article.

References

Ansari Mahabadi, S.; Massah Bavani, A.R. & Bagheri, A. (2018). Improving adaptive capacity of social-ecological system of Tashk-Bakhtegan Lake basin to climate change effects – A methodology based on Post-Modern Portfolio Theory. *Ecohydrology & Hydrobiology, 18(4).* 365-378.

Azar, A., Yazdanian A. & Ghandehari M. (2019). Stock portfolio optimization using genetic algorithm and adaptive k-means method based on genetic algorithm. *Presented in the 4th Seminar of Mathematics and Humanities*, Tehran, Iran. https://www.sid.ir/paper/883624/fa [in Persian]

Benati, S. (2011). Heuristic methods for the optimal statistic medians problem. *Computers & Operations Research* 38(1), 379–386.

Benati, S. (2015). Using medians in portfolio optimization. *Journal of the Operational Research Society* 66, 720 –731.

Benati, S & Rizzi R. (2009). The optimal statistical median of a convex set of arrays. *Journal of Global Optimization*. 44 (1), 79–9.

Ben Salah, H.; Chaouch, M.; Gannoun, A.; De Peretti, C. & Trabelsi, A. (2018). Mean and median-based nonparametric estimation of returns in mean-downside risk portfolio frontier. *Annals of Operations Research, 262*. 653–681

Boyle, P. P., Siu, T. K., & Yang, H. (2002). Risk and probability measures. *Risk, 15(7)*. 53–57

Branda, M.; Bucher, M.; Cervinka, M. & Schwartz, A. (2018). Convergence of a Scholtes-type regularization method for cardinality-constrained optimization problems with an application in sparse robust portfolio optimization. *Computational Optimization and Applications, 70*. 503-530.

Broadie, M. (1993). Computing efifcient frontiers using estimated. parameters. *Annals of Operations Research* 45(1), 21–58.
Chen, X.; Song, P.; Gao, K. & Qiao, Y. (2017). The Application in the Portfolio of China's A-share Market with Fama-French Five-Factor Model and the Robust Median Covariance Matrix. *International Journal of Economics, Finance and Management Sciences, 5(4).* 222-228.
Chen, J.M. (2016). A Four-Moment Capital Asset Pricing Model. In: *Postmodern Portfolio Theory*. Quantitative Perspectives on Behavioral Economics and Finance. Palgrave Macmillan, New York. https://doi.org/10.1057/978-1-137-54464-3_10
Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance* 1(2), 223–236.
Cooper, L.; Evnine, J.; Finkelman, J.; Huntington, K. & Lynch, D. (2016). Social Finance and the Postmodern Portfolio: Theory and Practice. *The Journal of Wealth Management*, *18(4)*. 9-21.
Dai, W. (2018). Mean-Entropy Models for Uncertainty Portfolio Selection. In: *Multi-Objective Optimization*; Springer: Singapore.
DeMiguel, V. & Nogales F.J. (2009). Portfolio selection with robust estimation. *Operations Research* 57(3), 560–577.
DeMiguel, V., Garlappi L. & Uppal R. (2009). Optimal versus naive diversiifcation: How inefifcient is the 1/N portfolio strategy□*Review of Financial Studies*, 22(5), 1915–1953.
Erfani, A. & Safari S. (2014). A study of return cyclical pattern monthly in Tehran stock (by using moving block bootstrap). *Financial Knowledge of Securities Analysis*, Vol. 7, No.22, PP. 47-59. https://jfksa.srbiau.ac.ir/article_2925.html?lang=en [in Persian]
Fabozzi, F. J.; Kolm, P. N.; Pachamanova, D. A. & Focardi, S. M. (2007). Robust Portfolio Optimization and Management. *John Wiley & Sons, Inc.*, Hoboken, New Jersey.
Geambasu, C.; Sova, R.; Jianu, I. & Geambasu, L. (2013). Risk measurement in post-modern portfolio theory: differences from modern portfolio theory. *Economic Computation and Economic Cybernetics studies and Research*, *47*. 486-508.
Gerber, S.; Markowitz, H. M & Pujara, P. (2015). Enhancing multi-asset portfolio construction under Modern Portfolio Theory with a robust co-movement measure. SSRN Electronic Journal. DOI: 10.2139/ssrn.2627803

Grossi, L. & Laurini F. (2011). Robust estimation of efifcient mea. -variance frontiers. *Advances in Data Analysis and Classii ɑtiɒ* □5(1), 3–22.

Gupta, P., Mehlawat M. K. & Mittal G. (2012). Asset portfolio optimization using support vector machines and real-coded genetic algorithm. *Journal of Global Optimization*. 53, 297–315.

Hu, J.; Harmsen, R.; Crijns-Graus, W. & Worrel, E. (2019). Geographical optimization of variable renewable energy capacity in China using modern portfolio theory. *Applied Energy, 253*.

Huang, D.; Zhou, J.; Li, B.; Hoi, S. C. H. & Zhou, S. (2016). Robust Median Reversion Strategy for Online Portfolio Selection. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 28(9).*

Huo, L., Kim T. H. & Kim Y. (2012). Robust estimation of covariance and its application to portfolio optimization. *Finance Research Letters*. 9(3) 121-134.

Jagannathan, R. & Ma T. (2003). Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps. *Journal of Finance* 58(4): 1651–1684.

Kamali, S. (2014). Portfolio Optimization Using Particle Swarm Optimization and Genetic Algorithm. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 10(2). 85-90

Kara, G., Ozmen A. & Weber G. W. (2019). Stability advances in robust portfolio optimization under parallelepiped uncertainty. *Central European Journal of Operations Research*. 27, 241-261.

Karandikar, R. (2012). Modelling in the Spirit of Markowitz Portfolio Theory in a Non-Gaussian World. *Current Science, 100(6)*. 666-672.

Katterbauer, K., Oguz C. & Salman S. (2012). Hybrid adaptive large neighborhood search for the optimal statistic median problem. *Computers & Operations Research* 39(11), 2679–2687.

Li, J.Y.M. (2018). Technical Note—Closed-Form Solutions for Worst-Case Law Invariant Risk Measures with Application to Robust Portfolio Optimization. *Operational Research, 66(6)*.

Markowitz, H. M. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance* 7(1): 77–91.

Mercurio, P. J.; Wu, Y. & Xie, H. (2020). An Entropy-Based Approach to Portfolio Optimization. *Entropy, 22(3)*.

Ortobelli, S., Rachev, S. T., Stoyanov, S., Fabozzi, F. J., & Biglova, A. (2005). The proper use of risk measures in portfolio theory.

International Journal of Theoretical and Applied Finance, 8(8). 1107–1133.

Puerto, J.; Rodriguez-Madrena, M. & Scozzari, A. (2020). An application of the p-median problem in optimal portfolio selection. IX Workshop on Locational Analysis and Related Problems.

Qiu, H., Han F., Liu H. & Caffo B. (2015). Robust portfolio optimization, in: Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS), 28, 46–54.

Raei, R. & Nabizadeh A. (2013). Testing Stock Return Distribution in the Tehran Stock Exchange. *Journal of Financial Management Strategy*. Vol.1, No.1, pp. 1-15. 10.22051/JFM.2014.952 [in Persian]

Rasiah, D. (2012). Post-modern portfolio theory supports diversification in an investment portfolio to measure investment's performance. *Journal of Finance and Investment Analysis, 1(1)*.

Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk, 2*. 21–41.

Rom, B. M. & Ferguson, K. W. (1993). Post-Modern Portfolio Theory Comes of Age. *The Journal of Investing, 2(4)*. 27.33.

Rotela, P. (2017). Entropic Data Envelopment Analysis: A Diversification Approach for Portfolio Optimization. *Entropy, 19*. 352.

Schulmerich, M.; Leporcher, Y.M.; & Eu, C.H. (2015). Modern Portfolio Theory and Its Problems. In: *Applied Asset and Risk Management*. Management for Professionals. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-55444-5_2

Shams, S., & Esfandirari Moghaddam, A. T. (2017). The impact of herding behavior on the performance of investment companies based on modern and post modern portfolio theory. *Financial Research Journal*, *19*(1), 97-118.

Shannon, C. E. (2001). A mathematical theory of communication. *ACM SIGMOBILE mobile computing and communications review*, *5*(1), 3-55.

Sefiane, S. & Benbouziane M. (2012). *Portfolio Selection Using Genetic Algorithm. Journal of Applied Finance & Banking*, 2(4). 143-154.

Sornette, D. (2004). Why Stock Market Crash: Critical Events Is Complex Financial Systems. Princeton University Press: Princeton.

Sortino, F. & Price, L. N. (1994). Performance Measurement in a Downside Risk Framework. *The Journal of Investing, 3(3)*. 59-64.

Swisher, P. & Kasten, G.W. (2005). Post-modern portfolio theory. *Journal of Financial Planning, 18(9)*.

Taghizadeh Yazdi, M., Fallahpour, S. & Ahmadi Moghaddam, M. (2017). Portfolio selection by means of Meta-goal programming and extended lexicograph goal programming approaches. *Financial Research Journal*, 18(4), 591-612. 10.22059/JFR.2017.62580 [in Persian]

Tehrani, R., Fallah, S.T., & Asefi, S. (2018). Portfolio Optimization Using Krill Herd Metaheuristic Algorithm Considering Different Measures of Risk in Tehran Stock Exchange. *Financial Research Journal*, 20(4), 409-426. 10.22059/FRJ.2019.244004.1006538 [in Persian]

Torki, L.; Esmaeli, N. & Haghparast, M. (2023). Comparison of GARCH Family Models in Estimating Value at Risk and Conditional Value at Risk on the Tehran Stock Exchange. Quarterly Journal of Quantitative Economics, 19 (4), 43-78. 10.22055/jqe.2021.33186.2240 [in Persian]

Trzpiot, G. & Majewska J. (2008). Investment decisions and portfolio classiifcation based on robust methods of estimation. *Operations Research and Decisions* 1, 83–96.

Tukey, J. W. (1960). A survey of sampling from contaminated distributions. In: I. Olkin (ed). Contributions to Probability and Statistics. Stanford University Press: Stanford, 448–485.

Viswanathan, L. & Maheswaran S. (2017). An Investigation into non-normality of stock returns. Asian Journal of Empirical Research, Asian Economic and Social Society, Vol.7 (2), 19-27.

Yang, L., Couillet R. & McKay M. R. (2015). A Robust Statistics Approach to Minimum Variance Portfolio Optimization. *IEEE Transactions on Signal Processing* 63(24).

Yanou, G. (2013). Extension of the random matrix theory to the L-moments for robust portfolio selection. *Quantitative Finance* 13(10), 518–531.

Zhou, R. (2017). Properties of Risk Measures of Generalized Entropy in Portfolio Selection. *Entropy, 19*. 657.

Zhu, H., Wang Y., Wang K. & Chen Y. (2011). Particle Swarm Optimization (PSO) for the constrained portfolio optimization problem. *Expert Systems with Applications*, 38(8). 10161-10169.