چشم‌انداز مدیریت صنعتی
شماره ۱۴ ـ تابستان ۱۳۹۳
ص‌ص ۱۵۶ ° ۱۳۹

ارائه مدل برنامه‌ریزی صفر و یک برای زمان‌بندی ماشین‌های موازی در تولید چندمحصوله

علیرضا ناصرصدرآبادی*، محمدحسین ستارخان**

چکیده

یکی از مهم‌ترین وظایف مدیریت، به‌ویژه در امور صنعتی و تولید، یافتن زمان‌بندی مناسب تولید است؛ به‌گونه‌ای که درنهایت یک تولیدکننده بتواند بیشترین مطلوبیت ممکن را از آن خود کند. در سال های اخیر مسئله جدیدی تعریف شده که هدف اساسی در برنامه‌ریزی تولید آن این است که علاوه‌بر کاهش زمان تکمیل محصولات، اقلام مختلف تشکیل‌دهنده یک بسته محصول با فاصله زمانی کمی از یکدیگر آماده شوند. در این مقاله، یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح برای بهینه‌سازی برنامه تولید یک سیستم چندمحصوله با خطوط تولید موازی ارائه می‌شود که مجموع فواصل زمانی میان زمان تکمیل اقلام مختلف بسته‌های تولیدی را حداقل می‌کند. در این راستا یک مثال عددی ارائه و حل شده است. از آنجایی‌که هدف عمده این پژوهش معرفی تابع هدف جدید است، تابع هدف پیشنهادی با دو تابع رایج در ادبیات موضوع مقایسه شد که نتایج حاکی از برتری تابع پیشنهادی است

کلیدواژه‌ها: سیستم چندمحصوله؛ زمان‌بندی خطوط موازی؛ برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح.

تاریخ دریافت مقاله:۹۲/۱۱/۶، تاریخ پذیرش مقاله: ۹۳/۵/۹.

* استادیار، دانشگاه یزد.
** کارشناس ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات.
E-mail: mh.sattarkhan@yahoo.com

۱. مقدمه

برنامه‌ریزی تولید همواره جایگاهی ویژه در تمامی سیستم‌های تولیدی داشته است؛ به‌طوری که بهره‌وری سیستم‌های تولیدی به‌شکل گسترده‌ای تحت تأثیر برنامه‌ریزی مناسب تولید قرار دارد. در برخی از سیستم‌های تولیدی محصولات زیادی تولید می‌شوند که به یکدیگر وابسته و درواقع مکمل یکدیگر هستند. هماهنگی میان تولیدات، تولید به‌موقع، حداکثر بهره‌برداری از خط تولید و مسائلی از این دست باعث می‌شوند که پرداختن به برنامه‌ریزی تولید این سیستم‌ها که به سیستم‌های تولید چندمحصوله معروف هستند، مستلزم استفاده از ابزارها و روش‌های مناسبی باشد. مسئله زمان‌بندی و تعیین توالی عملیات برای خطوط تولیدی شاخه‌ای از برنامه‌ریزی تولید است که کاربرد گسترده‌ای در صنایع مختلف پیدا کرده است. در این نوع مسائل، هدف تخصیص سفارش‌ها به ماشین یا خط تولید هر عملیات است. همچنین، توالی مناسب انجام عملیات مختلف روی خطوط مختلف نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در سال‌های اخیر، برخی از صنایع تولیدی چندمحصوله، ازجمله صنعت کاشی و سرامیک، محصولات خود را به‌صورت بسته ارائه می‌کنند. اجزای هر بسته زمان‌بندی می‌تواند تولید خاص خود را داشته باشد. ممکن است زمان تکمیل این اجزا روی مدیریت مناسب زنجیره تأمین، رضایت مشتری، نحوه ارائه کالا به بازار و ... تأثیر مستقیم داشته باشد؛ ازاین‌رو، مسئله جدیدی تعریف شده که هدف اساسی در برنامه‌ریزی تولید آن این است که علاوه‌بر کاهش زمان تکمیل محصولات، اقلام مختلف تشکیل‌دهنده یک بسته محصول با فاصله زمانی کمی از یکدیگر آماده شوند و در اختیار واحد فروش قرار گیرند تا بتوان یک بسته را به مصرف‌کننده نهایی تحویل داد. در این تحقیق، چنین مسئله‌ای را درقالب یک مسئله برنامه‌ریزی خطی بیان و حل می‌کنیم؛ برای این منظور، مدلی طراحی کردیم که برخلاف آنچه معمولاً در مرور پیشینه تحقیق با آن روبه‌رو هستیم، تابع هدف آن کاهش فواصل زمانی میان تولیدات مختلف هر بسته است. حالت کلی n خط تولید و m محصول (کار) را درنظر گرفتیم و محدودیت‌های مرتبط با واقعیت‌های جهان واقع را توسعه دادیم.

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

در دهه‌های اخیر، تحقیقات زیادی درمورد مسئله زمان‌بندی تولید ماشین‌آلات موازی انجام شده و مقالات متعددی در این خصوص انتشار یافته است. پاتس و کوالیوف [۲۳] بازنگری روی ادبیات موضوعی مدل‌های زمان‌بندی خانواده‌ای با یک ماشین، مسئله کارگاهی و ماشین‌های موازی انجام دادند. الله‌وردی و سایرین [۲] یک بازنگری جامع را درمورد تحقیقات مربوط به

زمان راه‌اندازی برای زمان‌بندی ماشین‌های موازی، با تقسیم‌بندی‌های راه‌اندازی دسته‌ای، غیردسته‌ای، مستقل از توالی و وابسته به نوع توالی انجام دادند.

سدا [۲۵] مدل‌های ریاضی برای مسائل زمان‌بندی جریان کارگاهی و سفارش کارگاهی پیشنهاد کرد. او برای مسئله اول مدلی برپایه برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط برای مسائل کوچک‌تر و مدل دیگری برای مسائل بزرگ‌تر که برای حل با روش‌های تصادفی ابتکاری مناسب است پیشنهاد کرد و برای مسئله سفارش کارگاهی یک مدل ریاضی ارائه داد.

لی و دیگران [۱۰] مسئله زمان‌بندی دو ماشین موازی مشابه را با زمان راه‌اندازی‌های دارای چند ویژگی به‌منظور حداقل کردن زمان تکمیل مدنظر قرار دادند که در آن هر کار دارای چند ویژگی و هر ویژگی دارای چندین سطح است. توکلی‌مقدم و مهدی‌زاده [۲۸] نیز یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح را برای زمان‌بندی ماشین‌های موازی مشابه با زمان راه‌اندازی خانواده محصول، برای حداقل کردن میانگین موزون زمان جریان، ارائه و آن را با الگوریتم ژنتیک حل کردند.

وبستر و عزیزاوغلو [۳۰] مسئله زمان‌بندی کارهایی با زمان راه‌اندازی خانواده محصول را روی ماشین‌های موازی مشابه، برای حداقل کردن میانگین موزون زمان جریان، توصیف کردند. آن‌ها دو الگوریتم برنامه‌ریزی پویا را برای حل مسئله موردنظر ارائه و خصوصیات مسائلی را که در آن‌ها هریک از الگوریتم‌ها مناسب است، مشخص کردند. نساه و دیگران [۱۸] یک مسئله زمان‌بندی ماشین‌های موازی مشابه را با زمان راه‌اندازی وابسته به توالی عملیات و با تاریخ دریافت سفارش، به‌منظور حداقل کردن زمان تکمیل کل، معرفی کردند.

آن و هیون [۱]، برونو و ستی [۴] و میسون و اندرسون [۱۶] الگوریتم‌هایی را برای حداقل کردن میانگین موزون زمان جریان، روی یک ماشین با زمان راه‌اندازی خانواده محصول پیشنهاد کردند.

در بیشتر مسائل زمان‌بندی، کارهای انجام‌شده سالم فرض می‌شوند؛ اما در برخی دیگر، کارهای معیوب نیز درنظر گرفته می‌شوند. رمضانیان و سعیدی‌مهرآباد [۲۴] یک مسئله زمان‌بندی ماشین‌های موازی نامرتبط چندمحصوله را همراه با امکان تولید کارهای معیوب بررسی کردند. فرآیندهای دوباره‌کاری در ایستگاه‌های تولید مورد مطالعه قرار گرفت؛ جایی که این فعالیت‌ها برای بهبود کارهای معیوب تا یک سطح استاندارد مقررشده، استفاده می‌شود. آن‌ها یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی عدد صحیح مختلط برای فرموله کردن مسئله پیشنهاد کردند و فرض نمودند که احتمال تولید معیوب برای هر کار روی ماشین‌ها از داده‌های پیشین قابل تخمین است. چند روش ابتکاری با تمرکز بر فرآیندهای دوباره‌کاری گسترش یافت. همچنین،

برای ارزیابی کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی، حداقل‌سازی زمان تکمیل به‌عنوان تابع هدف استفاده شد.

توکلی‌مقدم و دیگران [۲۹] یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط دوسطحی جدید برای زمان‌بندی N کار روی M ماشین موازی ارائه کردند که دارای دو هدف حداقل‌سازی تعداد کارهای باتأخیر و زمان تکمیل کل تمامی کارها است. مدل پیشنهادشده آنان ماشین‌های موازی غیرمرتبط را درنظر می‌گیرد. آن‌ها یک الگوریتم ژنتیک مؤثر را برای حل مسئله دوهدفه زمان‌بندی ماشین‌های موازی پیشنهاد کردند.

بودهار و هاند [۳] مسئله زمان‌بندی n کار مستقل را همراه با تقدم روی m ماشین به‌منظور حداقل کردن زمان تکمیل بررسی کردند. هر کار دارای یک زمان پردازش است و انتقال یک کار متوقف‌شده از یک ماشین به ماشین دیگر نیز نیازمند زمان است. آن‌ها یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای مسئله ارائه کردند و چند روش ابتکاری و حد پایین برای زمان تکمیل ارائه دادند. شمس و سلماسی [۲۶] مسئله زمان‌بندی ماشین‌های موازی با تقدم را با درنظر گرفتن یک تأخیر حمل‌ونقل ثابت برای کارهای جابه‌جاشونده و زمان تکمیل به‌عنوان معیار بررسی کردند. آن‌ها فرض کردند هنگامی‌که یک کار دارای تقدم روی یک ماشین دیگر ادامه می‌یابد، تأخیری میان زمان پردازش دو ماشین نیاز است که آن را «تأخیر حمل‌ونقل» می‌نامند. آن‌ها یک مدل ریاضی موجود [۳] را مورد نقد قرار دادند و یک مدل برنامه‌ریزی خطی و یک الگوریتم دقیق برای مسئله تحقیق، در شرایط تأخیر حمل‌ونقل برابر ارائه کردند.

ژو و هیدی [۳۲] یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط را برای حداقل نمودن زمان آماده شدن پیش از موعد و نیز تأخیر تمامی کارها در یک مسئله زمان‌بندی با ماشین‌های موازی غیرهم‌شکل و با ملاحظه زمان راه‌اندازی معرفی کردند. عمر و تئو [۲۰] مطالعات خود را روی حداقل کردن مجموع زمان‌های آماده شدن پیش از موعد یا تأخیرها استوار ساختند و یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط را برای حل این مسائل توسعه دادند.

توکلی‌مقدم و دیگران [۲۷] یک مدل ریاضی جدید برای یک مسئله زمان‌بندی ماشین‌های موازی چندمعیاره ارائه کردند که جریمه‌های کل مربوط به آماده شدن پیش از موعد و تأخیرها و نیز هزینه‌های ماشین را حداقل می‌کند. آن‌ها یک روش ابتکاری را برپایه الگوریتم ژنتیک پیشنهاد و توسعه دادند.

پژوهشگران دیگری محدودیت دسترسی به ماشین‌ها را بررسی کرده‌اند. لی [۱۱] زمان‌بندی ماشین‌های موازی را با محدودیت دسترسی مطالعه کرد؛ زمانی‌که همیشه حداقل یک ماشین در دسترس باشد و هر ماشین حداکثر یک محدودیت دسترسی داشته باشد. لیائو و شین [۱۳] مسئله‌ای را درنظر گرفتند که ماشین‌ها توانایی‌های متفاوتی داشته باشند. آن‌ها این مسئله را با

استفاده از یک الگوریتم جست‌وجوی باینری حل کردند. هاشمیان [۹] مسئله زمان‌بندی ماشین-های موازی را با محدودیت‌های دسترسی بررسی کرد. هدف در این تحقیق حداقل کردن زمان تکمیل در برنامه زمان‌بندی تولید کل بود. زو و یانگ [۳۱] یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی برای مسئله زمان‌بندی دو ماشین موازی پیشنهاد کردند. جایی که یک ماشین به‌صورت متناوب در دسترس نیست، کارها دارای تقدم نیستند و هدف حداقل کردن زمان تکمیل است. ما و سایرین [۱۵] به مسائل زمان‌بندی قطعی با محدودیت‌های دسترسی توجه کردند. آن‌ها به‌طور خلاصه نتایج پیچیدگی، الگوریتم‌های دقیق و الگوریتم‌های تقریبی را در چند محیط زمان‌بندی با شاخص‌های عملکردی متفاوت بررسی نمودند.

پژوهشگران متعددی، ازجمله چن و وستینز [۵]، نوگا و سیدن [۱۹]، دنگ و دیگران [۷]، پون و ژانگ [۲۲] و پون و یو [۲۱]، مسئله زمان‌بندی ماشین‌های مشابه را درمورد ماشین‌های موازی دسته‌ای مطالعه کرده‌اند. در یک سیستم پردازش دسته‌ای، چندین کار به‌عنوان یک دسته، به صورت هم‌زمان روی یک ماشین پردازش می‌شوند. اگر تعداد کل کارها بیشتر از ظرفیت پردازش دسته باشد، ظرفیت دسته محدود و در غیر این صورت نامحدود خوانده می‌شود.

مانک و دیگران [۱۷] تلاش کردند که تأخیر کل موزون را روی ماشین‌های موازی دسته‌ای با خانواده‌های سفارش ناسازگار و زمان آماده شدن نابرابر حداقل کنند. آن‌ها دو روش را پیشنهاد و از الگوریتم ژنتیک در هر دو روش استفاده کردند. چنگ و دیگران [۶] نیز به مسئله زمان‌بندی ماشین‌های موازی دسته‌ای با کارهای دارای اندازه‌های ناهمسان توجه کردند؛ جایی که کارها به صورت دسته‌ای پردازش می‌شود و ماشین‌ها ظرفیتی یکسان دارند. مدل حداقل‌سازی زمان تکمیل کل ارائه و از روش برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط برای تجزیه و تحلیل آن استفاده شد.

فو و دیگران [۸] زمان‌بندی برخط را روی یک ماشین موازی دسته‌ای نامحدود و یک ماشین استاندارد، به‌منظور حداقل کردن حداکثر زمان تکمیل کل کارها درنظر گرفتند؛ جایی که کارها درطول زمان به‌صورت برخط رسیده و روی دو ماشین (یک ماشین موازی دسته‌ای نامحدود و یک ماشین استاندارد) پردازش می‌شوند. همچنین اطلاعات کارها تا زمان رسیدن آن‌ها نامشخص است و کارهای رسیده می‌توانند روی هریک از دو ماشین آغاز شوند؛ اما تقدم مجاز نیست. آن‌ها برای این مسئله یک الگوریتم برخط ارائه کردند.

ما و دیگران [۱۴] زمان‌بندی دسته‌ای محدود برخط را به‌منظور حداقل کردن زمان تکمیل موزون کل روی ماشین‌های موازی مطالعه کردند. در این مسئله، تعداد n کار مستقل که در طول زمان به‌صورت برخط می‌رسند، باید به دسته‌ها تخصیص داده شوند و بدون تقدم روی m ماشین مشخص زمان‌بندی گردند. اطلاعات هر کار، شامل زمان پردازش و وزن آن، ازقبل مشخص نیست. هر ماشین تا b کار را به‌صورت هم‌زمان به‌ع نوان یک دسته می‌تواند انجام دهد (b<n).

آن‌ها الگوریتم‌های برخطی را روی ماشین‌های یکنواخت (زمانی‌که m ثابت است) و نیز روی ماشین‌های مشابه (زمانی‌که m بخشی از ورودی مسئله است) ارائه کردند.

لی و دیگران [۱۲] زمان‌بندی ماشین‌های دسته‌ای موازی نامرتبط را به‌منظور حداقل کردن زمان تکمیل، مطالعه کردند. کارهای با اندازه‌های ناهمسان روی ماشین‌های دسته‌ای زمان‌بندی می‌شوند که قابلیت پردازش چندین کار را به‌عنوان یک دسته، تا زمانی‌که ظرفیت دسته عبور نکند، دارند. هریک از کارها روی هر ماشین، زمان پردازش متفاوت و مخصوص به خود را دارد. چندین روش ابتکاری برای حل مسئله پیشنهاد شد که در دو گروه تقسیم‌بندی شده‌اند. روش‌های گروه اول ابتدا کارها را درون دسته‌ها زمان‌بندی می‌کنند و سپس دسته‌ها را به ماشین‌ها اختصاص می‌دهند. درمقابل، روش‌های گروه دوم ابتدا کارها را به ماشین‌ها اختصاص می‌دهند و سپس کارهای هر ماشین را درون دسته‌ها زمان‌بندی می‌کنند. آن‌ها همچنین یک حد پایین را برای ارزیابی کارایی روش‌ها به‌کار بستند.

۳. روش شناسی پژوهش

بیان مسئله اصلی تحقیق. مسئله موردنظر این تحقیق تعیین توالی و زمان‌بندی تولید محصولاتی است که درقالب بسته محصول ارائه می‌شوند. هر بسته محصول ترکیبی از محصولات فرعی است که هریک زمان تولید و محدودیت‌های خاص خود را دارند؛ برای نمونه، در یک کارخانه تولید کاشی و سرامیک، یک بسته محصول می‌تواند شامل اجزای مختلفی، چون کاشی کف، کاشی دیوار، تک‌گل و ... ، باشد. هدف این است که زمان‌بندی تولید محصولات به گونه‌ای باشد که علاوه‌بر کاهش زمان تکمیل محصولات، اختلاف میان زمان تکمیل اولین محصول و آخرین محصول از هر بسته حداقل شود. در پیشینه تحقیق، بیشتر هدف حداقل کردن زمان تکمیل کل درنظر گرفته شده است که در این تحقیق کارایی مناسبی ندارد.

تعاریف و مفروضات تحقیق. حالت کلی n خط تولید و m کار درنظر گرفته می‌شود. تولید اولین محصول از بسته اول را کار ۱، دومین محصول از بسته اول را کار ۲، ... و تولید آخرین محصول از آخرین بسته را کار m می‌نامیم. همچنین تقاضای هر بسته محصول مشخص است.
مفاهیم زیر در مدل‌سازی حالت کلی مسئله مفروض است:

۱. تمام خطوط تولید مشابه یکدیگرند و هریک می‌توانند تمام کارها را انجام دهند (روش مدل‌سازی معرفی‌شده در این تحقیق به‌گونه‌ای است که این فرض را می‌توان نادیده گرفت. مدل معرفی‌شده قابلیت توسعه در چنین شرایطی را نیز دارد)؛

۲. درصورت تخصیص یکی از کارها به یک خط، کل کار تا انتها روی همان خط صورت می‌گیرد و بخشی از کار به خط دیگر منتقل نمی‌شود. همچنین امکان قطع کار و انجام بخشی از آن در زمان دیگر روی همان خط نیز وجود ندارد (تقدم غیرمجاز است)؛
۳. زمان راه‌اندازی برای تمام محصولات و روی تمام خطوط ناچیز و قابل صرف‌نظر کردن است.
۴. هر خط در زمان واحد قادر به انجام یک کار است؛
۵. هر کاری می‌تواند جانشین هریک از کارها و روی هر خط باشد (تقدم و تأخر خاصی مطرح نیست)؛
۶. همه کارها می‌توانند در زمان صفر آغاز شوند و همه خطوط نیز می‌توانند از زمان صفر تولید را آغاز کنند؛
۷. همه خطوط از زمان صفر و درطول افق برنامه‌ریزی به‌طور پیوسته در دسترس و قادر به انجام عملیات هستند (عدم دسترسی به خطوط وجود ندارد)؛
۸. زمان پردازش واحد هر کار روی هر خط معلوم است؛
۹. همه خطوط تولید پیوسته دارند و بیکاری روی خطوط تعریف نشده است.

مدل‌سازی. در مدل‌سازی این مسئله، از نمادها و نشانگرهایی استفاده شده است که درادامه معرفی می‌کنیم.

نمادهای استفاده‌شده در مدل

i: نشانگر خط (ماشین)؛

$$i = 1,2, \dots , n$$

j: نشانگر کار؛

$$j = 1,2, \dots , m$$

k: نشانگر بسته؛

$$k = 1,2, \dots , O$$

p_{ij}: زمان پردازش واحد کار jاُم روی خط iاُم؛

M_j: مقدار موجود از محصول (کار) jاُم که در بسته مربوط به آن وجود دارد؛

D_k: تقاضا برای بسته kاُم؛

T_{ij}: زمان پردازش کار jاُم روی خط iاُم؛

$$T_{ij} = p_{ij} \times M_j \times D_k$$

M: یک عدد بزرگ مثبت؛

F_k: {مجموعه کارهای مربوط به بسته kاُم}.

متغیرهای تصمیم مسئله. در این مدل عدد صحیح، از شش نوع متغیر تصمیم استفاده شده است که عبارت‌اند از:

U_k: زمان تکمیل آخرین محصولی که از بسته kاُم آماده می‌شود؛

$$U_k = max\ \{\ C_j \mid j \in F_k\ \}$$

L_k: زمان تکمیل اولین محصولی که از بسته kاُم آماده می‌شود؛

$$L_k = min\ \{\ C_j \mid j \in F_k\ \}$$

Y_{ij}: اگر کار jاُم روی خط iاُم انجام شود برابر با ۱ و در غیر این صورت برابر با صفر؛

$X_{ij'j}$: اگر کار jاُم بلافاصله بعد از کار j´اُم روی خط iاُم انجام شود برابر با ۱ و در غیر این صورت برابر با صفر؛

$X°_{ij}$: اگر کار jاُم اولین کار روی خط iاُم انجام شود برابر با ۱ و در غیر این صورت برابر با صفر؛

C_j: زمان تکمیل کار jاُم.

متغیرهای Y_{ij}، $X_{ij'j}$ و $X°_{ij}$ صفر و یک هستند که پس از حل مدل ترتیب و توالی تولید را بیان می‌کنند و U_k، L_k و C_j متغیرهای نامنفی هستند که با زمان تکمیل محصولات مختلف ارتباط دارند.

مدل پیشنهادی. مدل خطی پیشنهادی به‌صورت زیر است:

$$\text{Min}\, Z = \sum_{k=1}^{O} (\, U_k - L_k\,) \tag{1}$$

S.T:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_{ij} = 1 \quad ; \ \forall j \tag{2}$$

$$C_j \le X°_{ij}\, .T_{ij} + M(1 - X°_{ij}) \quad ; \ \forall i,j \tag{3}$$

$$C_j \ge X°_{ij}\, .T_{ij} - M\big(1 - X°_{ij}\big) \ ; \ \forall i,j \tag{4}$$

$$C_j \le C_{j'} + X_{ij'j}\, .T_{ij} + M(1 - X_{ij'j}) \quad ; \ \forall i,j,j' , \qquad j \ne j' \tag{5}$$

$$C_j \ge C_{j'} + X_{ij'j}\, .T_{ij} - M(1 - X_{ij'j}) \quad ; \ \forall i,j,j' , \qquad j \ne j' \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \ne j}}^{m} X_{ij'j} + \sum_{i=1}^{n} X°_{ij} = 1 \quad ; \ \forall j \tag{7}$$

$$\sum_{\substack{j'=1\\ j'\neq j}}^{m} X_{ij'j} + X^{\circ}_{ij} = Y_{ij} \quad ; \ \forall i,j \tag{8}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq j'}}^{m} X_{ij'j} \leq Y_{ij'} \quad ; \ \forall i,j' \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{m} X^{\circ}_{ij} = 1 \quad ; \ \forall i \tag{10}$$

$$L_K \leq C_j \quad ; \forall K ; \ j \in F_K \tag{11}$$

$$U_K \geq C_j \quad ; \forall K ; \ j \in F_K \tag{12}$$

$$U_K , L_K , C_j \geq 0 \quad ; \ \forall K, j \tag{13}$$

$$Y_{ij} , X_{ij'j} , X^{\circ}_{ij} = 0,1 \quad ; \ \forall i,j,j' \tag{14}$$

معادله ۱ بیانگر تابع هدف مسئله است. همان‌طور که گفتیم، هدف مسئله تعیین توالی تولید محصولات مختلف روی خطوط مختلف است؛ به‌طوری که درنهایت کمترین فاصله زمانی ممکن میان تولید اقلام مختلف بسته‌ها وجود داشته باشد. پس باید زمان تکمیل اقلام مختلف هر بسته به یکدیگر نزدیک شوند و اختلاف زمان تکمیل آخرین محصولی که از یک بسته آماده می‌شود و زمان تکمیل اولین محصولی که از آن بسته آماده می‌شود، باید حداقل شود؛ یعنی $min(U_k - L_k)$؛ اما از آنجا که چندین بسته به‌طور هم‌زمان مورد توجه هستند، مجموع$(U_k - L_k)$ها را باید حداقل کنیم. معادله ۲ تضمین می‌کند که هریک از کارها تنها روی یک خط انجام می‌شود. معادلات ۳، ۴، ۵ و ۶ تضمین می‌کنند که بیکاری روی خطوط اتفاق نیفتد و بیانگر زمان تکمیل اقلام مختلف هستند. معادلات ۳ و ۴ تضمین می‌کنند که اولین کار روی هر خط از زمان صفر آغاز شود و زمان تکمیل آن برابر با زمان پردازش آن باشد. معادلات ۵ و ۶ تضمین می‌کنند که بین هر کار و کار قبلی آن فاصله زمانی و بیکاری خط ایجاد نشود و زمان تکمیل هر کار برابر با مجموع زمان پردازش آن کار و زمان تکمیل کار قبلی باشد. معادله ۷ تضمین می‌کند که هیچ یک از کارها روی هیچ‌یک از خطوط بیش از یک اولویت نخواهد داشت و روی بیش از یک خط قرار نخواهد گرفت (فقط دارای یک توالی تولید روی تمامی خطوط خواهد بود). در این رابطه، به‌ازای هر j ، یا کار jاُم اولین کار انجام‌شده روی یکی از خطوط خواهد بود یا پس از یک کار دیگر و روی یک خط قرار می‌گیرد. معادله ۸ تضمین می‌کند که هیچ‌یک از کارها روی هیچ‌یک

از خطوط بعد از دو کار یا بیشتر قرار نمی‌گیرد و روی بیش از یک خط قرار نخواهد گرفت و فقط دارای یک توالی تولید روی تمامی خطوط خواهد بود. معادله ۹ تضمین می‌کند که هیچ‌یک از کارها روی هیچ‌یک از خطوط قبل از دو کار یا بیشتر قرار نمی‌گیرد و روی بیش از یک خط قرار نخواهد گرفت و فقط دارای یک توالی تولید روی تمامی خطوط خواهد بود. معادله ۱۰ تضمین می‌کند که روی هیچ‌یک از خطوط بیش از یک کار به‌عنوان اولین کار انجام‌شونده روی آن خط مشخص نشود. معادلات ۱۱ و ۱۲ تعاریف متغیرهای تصمیم U_k و L_k هستند؛ اما برای لحاظ کردن این متغیرها در مسئله برنامه‌ریزی خطی باید محدودیت‌هایی به‌شکل معادلات ۱۱ و ۱۲ به مسئله اضافه شوند. معادلات ۱۳ و ۱۴ بیانگر نوع و خصوصیت متغیرهای تصمیم مسئله هستند.

تعداد متغیرهای تصمیم در مدل عبارت است از: (i.j)(j+1)+2k+j.

تعداد محدودیت‌های مدل عبارت است از:

(i.j)(2j+1)+i(j-1)+4j+i و یا i×(j-1)(2j+1)+3(i.j)+4j+i.

٤. تحلیل داده ها و یافته های پژوهش

حل مثال عددی. فرض کنید شرکتی سه نوع بسته محصول را تولید می‌کند. هر بسته شامل ۳ محصول است. دو خط تولید مشابه موجود است که هر خط قابلیت پردازش تمام ۹ محصول را دارد. فرض کنید زمان پردازش هر کار (محصول) روی هر خط مطابق جدول ۱ است.

جدول ۱. زمان پردازش هر کار روی خطوط

$T_{i,j}$	L_1	L_2
J_1	۱۶۲۰۰	۱۸۰۰۰
J_2	۹۶۰۰	۹۰۰۰
J_3	۷۵۰۰	۷۵۰۰
J_4	۲۵۲۰۰	۳۱۵۰۰
J_5	۱۸۲۰۰	۱۶۸۰۰
J_6	۲۵۲۰۰	۲۲۴۰۰
J_7	۹۰۰۰	۸۷۶۰
J_8	۱۷۲۸۰	۱۶۲۰۰
J_9	۱۴۴۰۰	۱۴۴۰۰

مدل پیشنهادی درمورد مسئله عنوان‌شده با استفاده از نرم‌افزار LINGO 9 و روی لپ‌تاپ ایسوس مدل K42JP با پردازشگر i3 ص‍Core ش‍Intel و حافظه DDR3 1066 MHz SDRAM حل شد و در زمان ۲۹ دقیقه و ۱۰ ثانیه و در تکرار ۱۴۸۴۳۳۵۵ به جواب بهینه دست یافت. پس از حل مدل مقادیر زیر به‌دست آمد:

$$Y_{1,1} = ۱\ , Y_{1,3} = ۱\ , Y_{1,4} = ۱\ , Y_{1,8} = ۱$$

$$Y_{2,2} = ۱\ , Y_{2,5} = ۱\ , Y_{2,6} = ۱\ , Y_{2,7} = ۱\ , Y_{2,9} = ۱$$

$$X^{\circ}{}_{1,4} = ۱\ , X^{\circ}{}_{2,6} = ۱$$

$$X_{1,4,1} = ۱\ ,\ X_{1,1,3} = ۱\ , X_{1,3,8} = ۱$$

$$X_{2,6,5} = ۱\ , X_{2,5,2} = ۱\ , X_{2,2,9} = ۱\ , X_{2,9,7} = ۱$$

به این ترتیب، توالی عملیات بهینه تولیدات مختلف مانند آنچه در شکل ۱ آمده است، خواهد بود. همچنین، زمان تکمیل اقلام مختلف هر بسته عبارت است از:

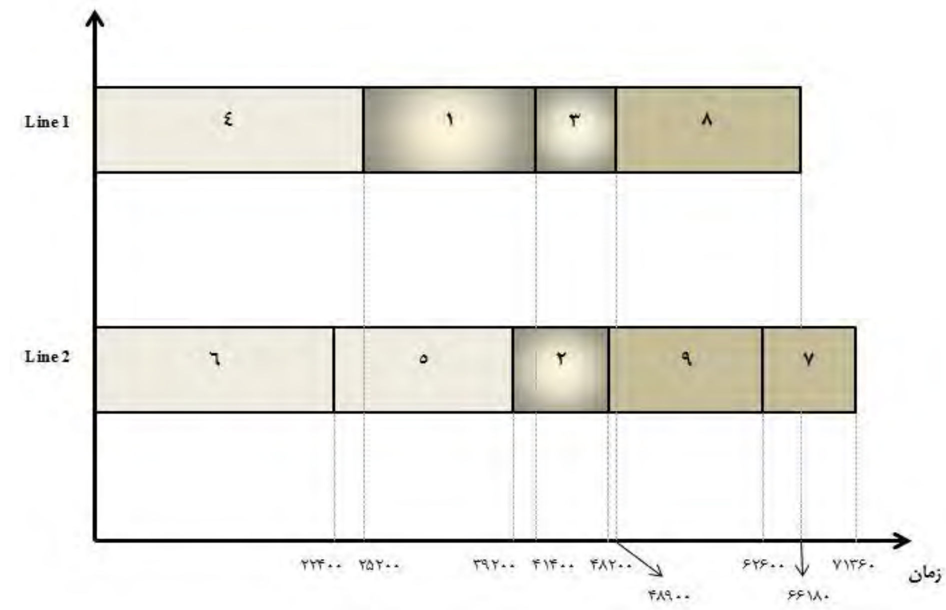
$$C_1 = ۴۱۴۰۰\ , C_2 = ۴۸۲۰۰\ , C_3 = ۴۸۹۰۰$$
$$C_4 = ۲۵۲۰۰\ , C_5 = ۳۹۲۰۰\ , C_6 = ۲۲۴۰۰$$
$$C_7 = ۷۱۳۶۰\ , C_8 = ۶۶۱۸۰\ , C_9 = ۶۲۶۰۰$$

بنابراین، موارد زیر به‌دست می‌آید:

$$U_1 = ۴۸۹۰۰\ \ ,\ \ L_1 = ۴۱۴۰۰$$
$$U_2 = ۳۹۲۰۰\ \ ,\ \ L_2 = ۲۲۴۰۰$$
$$U_3 = ۷۱۳۶۰\ \ ,\ \ L_3 = ۶۲۶۰۰$$

مقدار تابع هدف برابر است با:

$$Z = ۳۳۰۶۰\ .$$



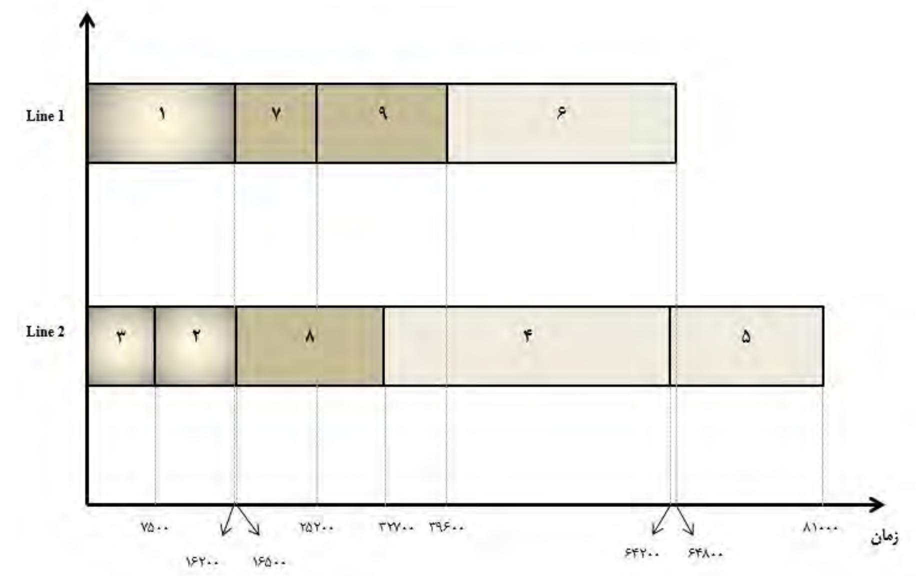
شکل ۱. زمان‌بندی و توالی عملیات بهینه

برای اطمینان از کارایی مدل پیشنهادی و تابع هدف آن باید مثال مطرح‌شده را با توابع دیگری حل و جواب‌های به‌دست آمده را مقایسه کنیم.

یکی از توابعی که در پیشینه پژوهش به‌صورت متعدد استفاده شده، تابع MinMax است؛ بنابراین مثال بالا مجدداً با تابع هدف $\text{MinMax}(U_k - L_k)$ درنظر گرفته شد. پس از حل مدل، نتایج زیر به‌دست آمد:

$C_1 = ۱۶۲۰۰ , C_2 = ۱۶۵۰۰ , C_3 = ۷۵۰۰$
$C_4 = ۶۴۲۰۰ , C_5 = ۸۱۰۰۰ , C_6 = ۶۴۸۰۰$
$C_7 = ۲۵۲۰۰ , C_8 = ۳۲۷۰۰ , C_9 = ۳۹۶۰۰$

همچنین، توالی عملیات تولیدات مختلف با تابع هدف مذکور مانند آنچه در شکل ۲ آمده است، خواهد بود.



شکل ۲. زمان‌بندی و توالی عملیات با تابع هدف $\text{MinMax}(\boldsymbol{U_k} - \boldsymbol{L_k})$

بنابراین، مجموع فواصل میان حداکثر و حداقل زمان تکمیل اقلام مختلف هر بسته عبارت است از ۴۰۲۰۰ که از حالت بهینه فاصله دارد.

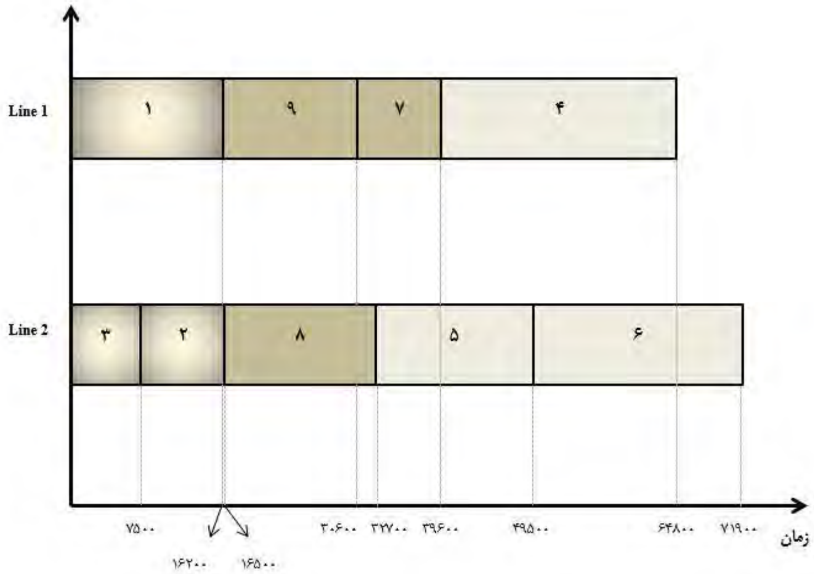
تابع هدف دیگری که برای مقایسه کارایی مدل پیشنهادی درنظر گرفته شد حداقل کردن مجموع بیشترین زمان‌های تکمیل بسته‌های تولیدی یا $Min\ \sum_{k=1}^{O}(U_k)$ است. پس از حل مدل، نتایج زیر به‌دست آمد:

$C_1 = ۱۶۲۰۰\ ,\ C_2 = ۱۶۵۰۰\ ,\ C_3 = ۷۵۰۰$

$C_4 = ۶۴۸۰۰\ ,\ C_5 = ۴۹۵۰۰\ ,\ C_6 = ۷۱۹۰۰$

$C_7 = ۳۹۶۰۰\ ,\ C_8 = ۳۲۷۰۰\ ,\ C_9 = ۳۰۶۰۰$

همچنین، توالی عملیات تولیدات مختلف با تابع هدف مذکور مانند آنچه در شکل ۳ آمده است، خواهد بود.



شکل ۳. زمان‌بندی و توالی عملیات با تابع هدف $Min(\sum_{k=1}^{O}(U_k)$

به این ترتیب، مجموع فواصل میان حداکثر و حداقل زمان تکمیل اقلام مختلف هر بسته عبارت خواهد بود از ۴۰۴۰۰ که از حالت بهینه فاصله دارد.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این تحقیق، مسئله جدیدی را تعریف کردیم که هدف اساسی در برنامه‌ریزی تولیدش این است که علاوه‌بر کاهش زمان تکمیل محصولات، اقلام مختلف تشکیل‌دهنده یک بسته محصول با فاصله زمانی کمی از یکدیگر آماده شوند. تصمیم گرفتیم چنین مسئله‌ای را درقالب یک مسئله برنامه‌ریزی خطی بیان و حل کنیم و برای این منظور مدلی طراحی کردیم که برخلاف آنچه معمولاً در مرور پیشینه تحقیق با آن روبه‌رو هستیم، تابع هدفش کاهش فواصل زمانی میان تولیدات مختلف هر بسته است. در تحقیقات زمان‌بندی و تعیین توالی عملیات ماشین‌های موازی، از روش‌های مختلفی برای حل مسئله کمک گرفته شده است؛ از الگوریتم‌-های ژنتیک و برنامه‌ریزی پویا تا از روش انشعاب و تحدید و الگوریتم‌های جست‌وجو. در این تحقیق، کوشیدیم با استفاده از یکی از ساده‌ترین و در عین حال، کاراترین و دقیق‌ترین روش‌های تصمیم‌گیری جوابی بهینه برای مسئله زمان‌بندی و تعیین توالی عملیات ماشین‌های موازی بیابیم. این جواب می‌تواند از آنچه در روش‌های تصادفی و غیرقطعی ابتکاری به‌دست می‌آید، بسیار دقیق‌تر باشد. از آنجا که در دنیای واقعی، تعداد خطوط تولید، اندازه بسته‌ها و نیز تعداد

کارها محدود است، مدل بالا از کارایی مناسبی برخوردار است؛ اما درصورت نیاز به حل مسائل با اندازه بزرگ، حل با نرم‌افزار نیازمند زمان بسیار زیادی است؛ بنابراین، استفاده از یک روش ابتکاری برای این کار در تحقیقات آتی را پیشنهاد می‌کنیم.

به‌منظور بررسی امکان کاربرد و نیز کارایی تحقیق صورت‌گرفته در عالم واقع، نتایج تحقیق را در اختیار خبرگان امر در بخش‌های مختلف مربوط به تولید شرکت گلدیس کاشی قرار دادیم. کارشناسان این نتایج را تأیید کردند.

برای تکمیل و ادامه تحقیق حاضر، پیشنهادات زیر را به محققان علاقه‌مند به فعالیت در این حوزه ارائه می‌کنیم که می‌توان با اعمال آن‌ها تحقیقات جدیدتری انجام داد:

ـ در این تحقیق زمان راه‌اندازی برای همه محصولات و روی همه خطوط را ناچیز و قابل چشم پوشی درنظر گرفتیم؛ اما در تحقیقات آتی می‌توان زمان راه‌اندازی کارها روی هریک از خطوط را نیز درنظر گرفت؛

ـ در این تحقیق، موجودی دردسترس هر محصول در انبار را درآغاز تولید صفر درنظر گرفتیم که می‌تواند در تحقیقات بعد، به‌صورت اعداد قطعی یا فازی درنظر گرفته شود. همچنین، ظرفیت انبار نیز می‌تواند به‌صورت یک پارامتر وارد مدل شود؛

ـ می‌توان پارامترهایی مانند مقدار تقاضای هر محصول را به‌صورت غیرقطعی و فازی درنظر گرفت.

منابع

1. Ahn, B.H., & Hyun, J.H. (1990). Single facility multi-class job scheduling. *Computers & Operations Research*, *17*(3), 265-272.

2. Allahverdi, A., Ng, C.T., Cheng, T.C.E., & Kovalyov, M.Y. (2008). A survey of scheduling problems with setup times or costs. *European Journal of Operational Research*, *187*(3), 985-1032.

3. Boudhar, M., & Haned, A. (2009). Preemptive scheduling in the presence of transportation times. *Computers & Operations Research*, *36*(8), 2387-2393.

4. Bruno, J., & Sethi, R. (1978). Tasks sequencing in a batch environment with setup times. *Foundations of Control Engineering*, *3*, 105-117.

5. Chen, B., & Vestjens, A.P.A. (1997). Scheduling on identical machines: How good is LPT in an on-line setting?. *Operations Research Letters*, *21*(4), 165-169.

6. Cheng, B., Yang, S., Hu, X., & Chen, B. (2012). Minimizing makespan and total completion time for parallel batch processing machines with non-identical job sizes. *Applied Mathematical Modelling*, *36*(7), 3161-3167.

7. Deng, X.T., Poon, C.K., & Zhang, Y.Z. (2003). Approximation algorithms in batch processing. *Journal of Combinatorial Optimization*, *7*(3), 247-257.

8. Fu, R., Tian, J., Yuan, J., & Li, Y. (2014). Online scheduling on an unbounded parallel-batch machine and a standard machine to minimize makespan. *Information Processing Letters*, *114*(4), 179-184.

9. Hashemian, N. (2010). Makespan minimization for parallel machines scheduling with availability constraints (M.S thesis). Dalhousie University, Canada.

10. Lee, C.H., Liao, C.J., & Chung, T.P. (2014). Scheduling with multi-attribute setup times on two identical parallel machines. *International Journal of Production Economics*, *153*, 130-138.

11. Lee, C.Y. (1991). Parallel Machines scheduling with nonsimultaneous machine available time. *Discrete Applied Mathematics*, *30*(1), 53-61.

12. Li, X., Huang, Y., Tan, Q., & Chen, H. (2013). Scheduling unrelated parallel batch processing machines with non-identical job sizes. *Computers & Operations Research*, *40*(12), 2983-2990.

13. Liao, L.W., & Sheen, G.J. (2008). Parallel Machine scheduling with machine availability and eligibility constraints. *European Journal of Operational Research*, *184*(2), 458-467.

14. Ma, R., Wan, L., Wei, L., & Yuan, J. (2014). Online bounded-batch scheduling to minimize total weighted completion time on parallel machines. *International Journal of Production Economics*, *156*, 31-38.

15. Ma, Y., Chu, C., & Zuo, C. (2010). A survey of scheduling with deterministic machine availability constraints. *Computers and Industrial Engineering*, *58*(2), 199-211.

16. Mason, A.J., & Anderson, E.J. (1991). Minimizing flow time on a single machine with job classes and setup times. *Naval Research Logistics*, *38*(3), 333-350.

17. Monch, L., Balasubramanian, H., Fowler, W.J., & Pfund, E.M. (2005). Heuristic scheduling of jobs on parallel batch machines with incompatible job

families and unequal ready times. *Computers & Operations Research*, *32*(11), 2731-2750.

18. Nessah, R., Chu, C., & Yalaoui, F. (2007). An exact method for $p_m/sds, r_i/\sum_{i=1}^{n} C_i$ or ($p_m/sds, r_i/\sum_{i=1}^{n} C_i$) problem. *Computers & Operations Research, 34*(9), 2840-2848.

19- Noga, J., & Seiden, S.S. (2001). An optimal online algorithm for scheduling two machines with release times. *Theoretical Computer Science*, *268*(1), 133-143.

20. Omar, M.K., & Teo, S.C. (2006). Minimizing the sum of earliness/tardiness in identical parallel machines schedule with incompatible job families: An improved MIP approach. *Applied Mathematics and Computation*, *181*(2), 1008-1017.

21. Poon, C.K., & Yu, W.C. (2005). A flexible online scheduling algorithms for batch machine with infinite capacity. *Annals of Operations Research*, *133*(1-4), 175-181.

22. Poon, C.K., & Zhang, P.X. (2004). Minimizing makespan in batch machine scheduling. *Algorithmica, 39*(2), 155-174.

23. Potts, C.N., & Kovalyov, M.Y. (2000). Scheduling with batching: A review. *European Journal of Operational Research*, *120*(2), 228-249.

24. Ramezanian, R., & Saidi-Mehrabad, M. (2012). Multi-product unrelated parallel machines scheduling problem with rework processes. *Scientia Iranica E, 19* (6), 1887-1893.

25. Seda, M. (2007). Mathematical models of flow shop and job shop scheduling problems. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical and Quantum Engineering*, *1*(7), 295-300.

26. Shams, H., & Salmasi, N. (2014). Parallel machine scheduling problem with preemptive jobs and transportation delay. *Computers & Operations Research, 50*, 14-23.

27. Tavakkoli-Moghaddam, R., Jolai, F., Khodadadeghan, Y., & Haghnevis, M. (2006). A mathematical model of a multi-criteria parallel machine scheduling problem: A genetic algorithm. *International Journal of Engineering Transactions A: Basic, 19*(1), 79-86.

28. Tavakkoli-Moghaddam, R., & Mehdizadeh, E. (2007). A new ILP model for identical parallel-machine scheduling with family setup times minimizing the total weighted flow time by a genetic algorithm. *International Journal of Engineering Transactions A: Basic, 20*(2), 183-194.

29. Tavakkoli-Moghaddam, R., Taheri, F., Bazzazi, M., Izadi, M., & Sassani, F. (2009). Design of a genetic algorithm for bi-objective unrelated parallel machines scheduling with sequence-dependent setup times and precedence constraints. *Computers & Operations Research, 36*(12), 3224-3230.

30. Webster, S., & Azizoglu, M. (2001). Dynamic programming algorithms for scheduling parallel machines with family setup times. *Computers & Operations Research, 28*(2), 127-137.

31. Xu, D., & Yang, D.L. (2013). Makespan minimization for two parallel machines scheduling with a periodic availability constraint: Mathematical programming model, average-case analysis, and anomalies. *Applied Mathematical Modelling*, *37*(14-15), 7561-7567.

32. Zhu, Z., & Heady, R.B. (2000). Minimizing the sum of earliness/tardiness in multi machine scheduling with sequence dependent setups on uniform parallel machines. *Computers & Industrial Engineering*, *38*(2), 297-305.