دوفصلنامه علمی-پژوهشی **تأملات فلسفی**
دانشگاه زنجان
سال ششم، شماره ۱۶، بهار و تابستان ۱۳۹۵
صفحات ۱۷۳- ۲۰۶

Research Journal of
Philosophical Meditations
University of Zanjan
Vol.6, No.16, Spring & Summer 2016

مقبولیّت اثباتهای تصویری در ریاضیات

حسین بیات[۱]

چکیده

اغلب ریاضی‌دانان اثباتهای تصویری را به‌عنوان یک نوع اصیل از اثباتهای ریاضیاتی نمی‌پذیرند یا در پذیرش آنها تردید دارند. در این مقاله ده ایراد متداول یا احتمالی وارد بر این نوع اثباتها صورت‌بندی شده و جداگانه مورد ارزیابی نقادانه قرارگرفته است. در هریک از این ایرادها ادعا می‌شود که اثباتهای تصویری فاقد یکی از ویژگی‌هایی هستند که برای اثباتهای ریاضیاتی اساسی‌اند یا باید اساسی باشند: صوری بودن، نمادی بودن، دقیق بودن، اعتمادپذیری، وارسی‌پذیری، کلی بودن، مشروعیّت، خودبسندگی، فراگیر بودن و زایا بودن. اما به نظر می‌رسد که هیچ کدام از این ایرادها وارد نیست و بنابراین نپذیرفتن این نوع از اثباتها بیشتر معلول عوامل روان‌شناختی و جامعه‌شناختی، به‌خصوص غلبهٔ تلقی صورت-گرایانه در جامعهٔ ریاضی و القاء آموزه‌های صورت‌گرایانه در نظام های آموزش ریاضی است تا دلایل منطقی یا روش‌شناختی. ما نه تنها دلایل قوی بر رد کلی و پیشینی این نوع اثبات، به‌عنوان یک الگوی استنتاجی در ریاضیات، نداریم بلکه دلایل خوبی برای به رسمیت شناختن آن داریم. آنچه در اینجا حائز اهمیّت است آگاهی از نقشی است که این نوع از اثباتها در کل ریاضیات دارد یا باید داشته باشد، نه کمتر و نه بیشتر.

واژگان کلیدی: اثباتهای تصویری، اعتمادپذیری، مشروعیّت، خودبسندگی،

تاریخ دریافت: ۹۴/۹/۲۰ ؛ تاریخ پذیرش: ۹۵/۲/۱۱

۱. دکترای فلسفهٔ علم و مدرس دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران.
Logicbay@yahoo.com

مقبولیّت، خطاپذیری.

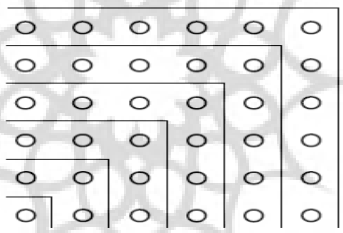
مقدمه

منظور از «اثباتهای تصویری»[1] اثباتهایی هستند که بار اقناع یا توجیه در آنها به دوش تصویر است. مثلاً مدعا و اثبات زیر را در نظر بگیرید:

مدعای شمارهٔ ۱: معادلهٔ زیر، به‌ازای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، مانند n، صادق است.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \quad (*)$$

اثبات شمارهٔ ۱:



تصویر ۱: اگر نقاطی را به تعداد دلخواهی از اعداد فرد، یعنی به تعداد $1+3+5+\ldots+2n-1$، (در اینجا $n=6$) و به ترتیب خاصّی (در اینجا ردیف‌هایی به شکل ┐) طوری کنار هم بچینیم که بتوان تا هر عدد فرد دلخواهی آن را ادامه داد، آنگاه توانسته‌ایم «عمل جمع اعداد فرد متوالی» را که در سمت چپ معادلهٔ * بیان شده به صورت «چیدن خانه‌هایی با تعداد فرد نقطه» به تصویر بکشیم. تصویر بدست آمده مربعی است که در هر ضلع آن n نقطه وجود دارد. بنابراین در کل این مربع باید n^2 نقطه وجود داشته باشد، و این همان عددی است که در سمت راست معادلهٔ * ادعا شده است.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تصویر در اینجا نه صرفاً به‌عنوان یک ابزار کمکی و فرعی، بلکه به‌عنوان بخش تعیین کننده و اجتناب‌ناپذیری از اثبات به کار رفته است؛ به‌طوری که بدون آن، استدلال کننده در اقناع مخاطب یا توجیه مدعا موفق نخواهد بود.

---

[1]. pictorial proofs

اثباتهای تصویری را باید در مقابل اثباتهای نمادی[1] به کار ببریم. در اثبات نمادی، همهٔ کارکردهای اساسی یک اثبات، مثل توجیه و اقناع و تبیین، از طریق نمادها انجام می‌پذیرد. البته تردیدی نیست که در نوشتن اثباتهای نمادی، افزون بر نمادهای ریاضیاتی، یعنی علائم زبان صوری یا مصنوعی زبان ریاضیات، از نمادهای زبان طبیعی، یعنی انواع تعبیرها (اعم از حروف و عبارتها و جملات زبان طبیعی) نیز استفاده می‌شود. گاهی نیز علاوه بر نمادهای زبان طبیعی، از تصاویر و نمودارها نیز به‌عنوان ابزارهای کمکی استفاده می‌شود؛ اما طبق نگرش متعارف و سنتی، می‌توان تصاویر و نمودارها و حتی، در صورت لزوم، نمادهای زبان طبیعی را کنار گذاشت. همین‌جا بهتر است حساب اثباتهای تصویری را از اثباتهای نمادی مصوّر[2] جدا کنیم. همان‌طور که در بالا تصریح کردیم تصویر یا نمودار در اثباتهای تصویری نقش اجتناب‌ناپذیری دارند؛ به‌طوری‌که با حذف تصاویر یا نمودارها اثبات ناتمام و بنابراین نامعتبر خواهد شد؛ درصورتی‌که تصویرها و نمودارها در اثباتهای نمادیِ مصوّر صرفاً با هدف آسان‌یاب کردن مدعیات و مفاهیم و فرایندها به کار می‌روند و بنابراین قابل حذف هستند.

اثباتهای تصویری، برخلاف اثباتهای نمادی، اساساً مناقشه‌آمیزند؛ یعنی ریاضی‌دانان در پذیرش آنها، به عنوان یک نوع اصیل[3] و مستقل از اثباتها، اتفاق نظر ندارند. حتی در نگاه نخست، به نظر می‌رسد که از نظر تقریباً همهٔ ریاضیدانان، این نوع از اثباتها فقط «شبه‌اثبات[4]» هستند و نه اثبات واقعی. جیمز رابرت براون تلقی متعارف دربارهٔ نمودارها و تصاویر را این‌گونه توصیف می‌کند:

– نمودارها و تصاویر به‌لحاظ روان‌شناختی مفیدند؛ اما چیزی را اثبات نمی‌کنند.

– نمودارها و تصاویر حتی ممکن است گمراه‌کننده باشند. (Brown, 2008, 7)

این تلقی ریشه در آموزه‌های صورت‌گرایانه دارد. هیلبرت دربارهٔ استفاده از اشکال[5]

---

[1]. Symbolic proofs
[2]. Illustrated proofs
[3]. genuine
[4]. Pseudo-proof
[5] figure

و نمودارها[1] در اثباتها می‌گوید:

> اثبات می‌تواند با توسل به یک تصویر مناسب ارائه شود؛ اما این توسل به تصاویر را نباید ضروری بینداریم. تصاویر می‌توانند تعبیرها را آسان‌تر کنند و ابزار ثمربخشی برای کشف قضایای جدید به حساب آیند. اما [...] قضیه تنها زمانی ثابت می‌شود که اثبات در کار باشد؛ اثباتی که مستقل از نمودارهاست و گام‌به‌گام بر اصول موضوعه استوار است. (Hilbert, 1894, 11)

اما چنین دیدگاهی تا چه اندازه قابل دفاع است؟ یعنی مخالفین معمولاً چه دلایلی برای نامقبولیّت این نوع از اثباتها ارائه می‌دهند و این دلایل تا چه میزان عقلانی و قابل دفاع هستند؟ این پرسش اصلی این نوشتار است و من برای پاسخ به آن، ایرادهایی را که تا کنون طرح شده است یا می‌توان طرح کرد، در ذیل ده بند، جداگانه، تقریر و نقادانه بررسی خواهم کرد.

اثباتهای تصویری، گرچه در نگرش متعارف و سنتی همواره با تردید و انکار همراه بوده‌اند، اما کاربران و طرفداران و مدافعان قابل توجهی هم داشته‌اند. شاید بتوان گفت که لاکاتوش اولین کسی است که بعد از غلبهٔ صورت‌گرایی، از اثباتهای غیرصوری دفاع کرده است. البته او مشخصاً از اثباتهای تصویری نام نمی‌برد؛ اما منحصر کردن استدلالها و اثباتهای ریاضی به اثباتهای صوری را نقد می‌کند و نشان می‌دهد که همچنان بخش مهمی از اثباتهای ریاضی‌دانان، در قلمروهای مختلف ریاضیات، غیرصوری هستند. اثباتهای تصویری را نیز می‌توان در ذیل همین نوع از اثباتها پذیرفت. او حتی خود برای حدس اویلر یک اثبات غیرصوری ارائه می‌دهد که در حقیقت، طبق تعریفی که در ابتدای این مقاله آوردیم، باید آن را یک اثبات تصویری قلمداد کنیم.

افزون بر دیدگاه شبه تجربه‌گرایانهٔ لاکاتوش، از منظر نهادگرایانه نیز کسانی مثل هرش و دیویس به دفاع از اثباتهای تصویری پرداخته‌اند. آنها با متمایز ساختن و رسمیت بخشیدن به اثباتهای عملی، راه را عملاً برای پذیرش این نوع اثباتها هموار ساختند: «اثبات به این معنا همان کاری است که ریاضی‌دان انجام می‌دهد تا دیگران را متقاعد سازد» (Hersh, 1997, 49). اما در سه دههٔ اخیر، یعنی از دههٔ ۹۰ قرن بیستم به این سو،

---

[1]. diagram

اثباتهای تصویری به‌عنوان نوع معینی از اثباتهای غیرصوری مستقلاً موضوع مطالعات و مداقه‌های فلسفی و کاوش‌های ریاضی قرار گرفته و تلاشهای بیشتری برای دفاع عقلانی از آنها به عمل آمده است که مهم‌ترین آنها به‌وسیلۀ باروایز و اچمندی در «اطلاعات دیداری و استدلال معتبر» (۱۹۹۱)، و جیمز رابرت براون در «اثباتها و تصاویر» (۱۹۹۷) صورت پذیرفته است[1]. راجر نلسون نیز در کتاب دوجلدی «اثباتهایی بدون واژه ها» (۱۹۹۱ و ۲۰۰۰) انواعی از این اثباتها را جمع‌آوری و دسته‌بندی کرده است (اثبات شمارۀ ۱ از جملۀ آنهاست).

همان‌طور که دتلفسن نیز جمع‌بندی کرده است، «تا کنون دو دسته از دلایل علیه نقش توجیهی اصیل نمودارها [وتصاویر] ارائه شده است؛ دلایلی که بر اعتمادناپذیری [...] و دلایلی که بر جزئی بودن [اثباتهای تصویری] ارائه شده‌اند.» (Detlefsen 2008, 20) بنابراین دلایلی هم که معمولاً در این آثار به نفع اثباتهای تصویری ارائه شده‌اند، در واقع یا برای ردّ اعتمادناپذیری کلی این نوع اثباتها یا برای ردّ جزئی بودن آنهاست؛ درحالی- که ایرادهای بیشتری به اثباتهای تصویری می‌توان وارد کرد که من در این نوشتار به آنها نیز اشاره و نقدشان خواهم کرد. گاهی نیز این دو ایراد، یعنی اعتمادناپذیری و جزئی بودن، با ایرادهای دیگری، از جمله عدم مشروعیّت و وارسی‌پذیری، خلط می‌شوند؛ درحالی که هرکدام از این ایرادها استلزامات متفاوتی دارند و من در اینجا، با متمایز کردن ایرادهای مختلف، مانع این نوع خلطها نیز خواهم شد.

اثباتهای تصویری، صوری[2] نیستند

شاید بدیهی‌ترین ایراد اثباتهای تصویری، از منظر ریاضیدانان معاصر، غیرصوری بودن

---

[1]. مطالعات دیگری نیز دربارۀ نقش‌های تبیینی و اکتشافی تصاویر و نمودارها در ریاضیات صورت پذیرفته است؛ به‌خصوص مارکوس جیاکوئینتو در «تفکر دیداری در ریاضیات: یک بررسی معرفت شناختی» (۱۹۹۴) و اریک هَمِر در «منطق و اطلاعات دیداری» (۱۹۹۵). گزارش خوبی از این کارها را می‌توانید در مقالۀ مانکوز با عنوان «دیداری‌سازی در منطق و ریاضیات» (۲۰۰۵) بیابید. مانکوز نیز از طرفداران اثباتهای تصویری است.

[2]. formal

آنها باشد: اثباتهای تصویری نامقبول‌اند چون صوری نیستند. یعنی در یک نظام صوری معین و صرفاً براساس اصول موضوعه و قواعد آن نظام ارائه نشده‌اند. این ایراد را می‌توان در نقل قولی که از هیلبرت آوردیم مشاهده کرد. او در توصیف اثبات و نقش تصاویر نمودارها در آن می‌گوید: «قضیه تنها زمانی ثابت می شود که اثبات در کار باشد؛ اثباتی که مستقل از نمودارهاست و گام‌به‌گام بر اصول موضوعه استوار است.» (Hilbert, 1894, 11) اما این ایراد زمانی وارد است که ما لزوماً خود را مقید به ارائه و پذیرش اثباتهای صوری کرده باشیم، مثل بورباکی‌ها یا کسانی که به برنامهٔ هیلبرت متعهد هستند؛ درحالی‌که عملاً ریاضیدانان به چنین برنامه و قیدهای صورت‌گرایانه متعهد نیستند و بسیاری از اثباتهایی که ارائه می‌دهند و می‌پذیرند، به معنای دقیق کلمه، صورت‌گرایانه نیستند.

فیلسوفان و ریاضیدانان فراوانی به سود این مدعا که شرط صوری بودن اثباتهای ریاضی غیرضروری و حتی غیرممکن است استدلال کرده‌اند که از میان آنها می‌توان به استدلال لاکاتوش و هرش اشاره کرد. لاکاتوش دو نوع اثبات غیرصوری را، با قیدهای «پیشاصوری» و «پساصوری»، از یکدیگر متمایز می کند و با استناد به شواهد تاریخی یا ارائهٔ مثالهای مویِّد، مصادیق متعددی را برای آنها برمی‌شمارد (Lakatos, 1978, 61). منظور او از اثباتهای پیشاصوری، استدلالهای موفقی هستند که پیش از شکل‌گیری یا توسعهٔ کافی یک دستگاه صوری اصل موضوعی ارائه می‌شوند؛ مثل اثبات فرایابانهٔ[1] حدس اویلر[2] که خود لاکاتوش آن را ارائه کرد[3] یا اثبات فرایابانهٔ قضیهٔ کوشی در نیمه

---

[1]. heuristic

۲. اگر V تعداد رئوس و E تعداد یالها و F تعداد وجوه یک چندوجهی باشند، آنگاه رابطهٔ V-E+F=2 برقرار است.

۳. لاکاتوش (۱۹۲۲- ۱۹۷۴) در رشته‌های منطق، ریاضیات و فیزیک تحصیل کرده و زیر نظر آلفرد رنی دربارهٔ نظریهٔ احتمال و نظریهٔ اندازه کار کرده بود. او به پیشنهاد جرج پولیا دربارهٔ حدس اویلر کار کرد و در کتاب «اثباتها و ابطالها: منطق اکتشاف ریاضیاتی» (۱۹۵۷) و مقالهٔ «اثباتهای ریاضیاتی چه چیزی را ثابت می‌کنند؟ » (۱۹۶۱-۱۹۵۹) از طریق یک آزمایش فکری، درستی حدس اویلر را نشان داد.

اول قرن نوزدهم[۱]. اما اثباتهای پساصوری اثباتهای ناظر به فراقضایای یک دستگاه صوری هستند؛ به‌طوری‌که فرانظریه‌ای صوری برای تعیین اعتبار آن اثباتها در کار نیست؛ مثل اثباتهای تصمیم‌ناپذیری در منطق، یا اثبات اصل دوگانگی[۲] در هندسهٔ تصویری.

هرش نیز ضمن تمایز اثباتهای صوری از «اثباتهای عملی» نشان می‌دهد که بسیاری از اثباتهای ریاضی از همین نوع اخیر هستند: «اثباتهای فی‌الواقع زنده[۳] در ریاضیات همان اثباتهای غیرصوری‌اند» (Hersh, 1997, 57). به نظر می‌رسد که تلقی لاکاتوش و هرش نسبت به دیدگاه صورتگرایان و متعارف واقع‌بینانه‌تر است؛ زیرا اولاً به گواهی تاریخ ریاضیات، اثباتهای پذیرفته‌شده لزوماً صوری نیستند، ثانیاً به حکم قضایای ناتمامیت گودل، حتی اثباتهای نمادی در نظامهای حاوی حساب مقدماتی (PA) نمی‌توانند کاملاً یا مطلقاً صوری باشند.

باید توجه کرد که ریاضی‌دانان عملاً اثباتهای غیرصوری را نه به‌عنوان یک نوع اثبات متکی بر اثباتهای صوری یا یک نوع شبه‌اثبات، بلکه به‌عنوان یک نوع اصیل و مستقلاً معتبر، می‌پذیرند. لاکاتوش و هرش، به‌طور جداگانه و با دو رویکرد مختلف، یعنی به ترتیب از منظر واقع‌گرایانه و ناواقع‌گرایانه، استدلال می‌کنند که اثباتهای غیرصوری اصیل هستند (Bayat, 2015, 80). پس صوری بودن شرط لازم برای اثبات بودن نیست.

---

۱. کوشی قضیه‌ای را در اوایل قرن نوزدهم اثبات کرد که به‌موجب آن، اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ به ازای هر x به f(x) همگرا باشد و همهٔ f_n ها پیوسته باشند، آنگاه f نیز پیوسته است. اما آبل در ۱۸۳۶ متوجه شد که قضیهٔ کوشی دربارهٔ سری فوریه صدق نمی‌کند. یعنی اگر تابع f_n را $-1^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}$ در نظر بگیریم در این صورت قضیهٔ کوشی برقرار نیست. سرانجام سایدل در ۱۸۴۷ کشف کرد که دلیل نقض قضیهٔ کوشی نایکنواخت بودن همگرایی سری فوریه است و بنابراین او قضیهٔ کوشی را با افزودن این شرط (یعنی همگرایی یکنواخت f_n ها) دوباره اثبات نمود.

۲. طبق این اصل، با جابه‌جایی واژه‌های «نقطه» و «خط» در گزارهٔ معتبری که دربارهٔ برخورد نقاط و خطوط در صفحهٔ تصویری است، یک گزارهٔ معتبر دیگر به دست می‌آید.

3. real – life proofs

اثباتهای تصویری، نمادی[1] نیستند

نمادی بودن را نباید با صوری بودن اثبات یکسان بگیریم. نمادی بودن شرط لازم صوری بودن اثبات است، اما کافی نیست. اثبات صوری، افزون بر نمادی بودن، باید در درون یک نظام استنتاجی معیّن، شامل اصول موضوعهٔ مناسب و قواعد معین، قابل طرح باشد. اثباتهای ریاضیاتی متعارف شاید، به معنای دقیق کلمه، صوری نباشند؛ اما درهرحال، همهٔ آنها نمادی هستند؛ درحالی‌که اثباتهای تصویری به لحاظ نشانه‌شناختی از مقولهٔ شمایل (آیکون) هستند و نه نماد، و بنابراین نمی‌توان آنها را حتی به‌مثابهٔ اثباتهای ریاضیاتی غیرصوری پذیرفت. اما این دلیل علیه اثباتهای تصویری نیز به‌خودی‌خود نمی‌تواند قانع‌کننده باشد؛ یعنی تصویری یا نمادی بودن یک استدلال نمی‌تواند دلیل مقبولیّت یا نامقبولیّت آن باشد؛ زیرا ما باید مقبولیّت یک استدلال را در توانایی ایفای نقشی که از آن انتظار داریم جستجو کنیم. حال، از یک سو، روشن است که نقش و کارکردی که ما از یک استدلال انتظار داریم چیزی جز اقناعِ شناختی[2] مخاطب یا توجیه منطقی یک گزاره یا باور نیست. گاهی نیز البته استدلال‌ها کارکردهای دیگری مثل تبیین و تفسیر دارند یا پیامدهای مهمی مثل توسیع دارند؛ اما درهرحال، اقناعِ شناختی (در مقابل اقناعِ عاطفی) و توجیه صدق نتیجه بر اساس صدق مقدمات، دو کارکرد اصلی استدلال‌ها هستند.

از سوی دیگر، دربارهٔ استدلالهای تصویری، نه‌تنها نمی‌توان به نحو مطلق و از قبل حکم کرد که آنها از اقناع شناختی اعضای جامعهٔ ریاضی یا توجیه منطقی مدعیات یا گزاره‌های ریاضیاتی ناتوان‌اند، بلکه ما شواهد خوبی داریم که نشان می‌دهند اگر استدلالهای تصویری به‌درستی ارائه شوند، مثل استدلال به‌کاررفته در اثبات شمارهٔ ۱، می‌توانند به‌خوبی از عهدهٔ این نقشها برآیند. بنابراین این ایراد نیز به نحو مطلق و کلی وارد نیست.

اثباتهای تصویری، دقیق[3] نیستند

1. symbolic
2. Cognitive persuasion
3. rigor

مک لان در تعریف اثبات دقیق می گوید: «یک اثبات دقیق است هرگاه به زبان محمولات مرتبهٔ اول $L(\epsilon)$ و به‌عنوان دنباله‌ای از استنتاج‌های حاصل از اصول ZFC نوشته شود یا بتوان آن را نوشت؛ به‌طوری که هر کدام از استنتاجها باید مطابق با یکی از قواعد مقرر باشد.» (Mac Lane, 1986, 377) حال، اگر ما دقیق بودن را به این ترتیب با صوری بودن یا نمادی بودن مترادف بگیریم، یا حتی اگر صوری بودن یا نمادی بودن را شرط لازم دقّت بدانیم، آنگاه اثباتهای تصویری نمی‌توانند دقیق باشند. این در واقع دیدگاهی است که بسیاری از ریاضی‌دانان دارند یا ممکن است مخالفان در توضیح دلایلشان به آن متوسل شوند. اما این ایراد متضمن مغالطهٔ «مصادره به مطلوب» است و بنابراین قابل دفاع نیست. یعنی معلوم نیست که چرا ما باید این تلقی انحصارطلبانه از مفهوم «دقّت ریاضیاتی» را معیار قرار دهیم؟

هرش و دتلفسن، جداگانه، به این انحصارطلبی اعتراض کرده‌اند. به عقیدهٔ هرش مفهوم اثبات دقیق باید به‌گونه‌ای اصلاح شود که بتوان اثباتهای مبتنی بر محاسبات ماشینی یا شواهد عددی کافی یا الگوریتمهای احتمالاتی کافی را نیز بر اساس آن مفهوم فهمید و توضیح داد (Hersh, 1997, 58). دتلفسن نیز رأی مشابهی دارد. او تلقی متعارف ریاضی‌دانان دربارهٔ دقّت را نتیجهٔ غلبهٔ نگاه صورت‌گرایانه در اواخر قرن ۱۹ و اوایل قرن بیستم می‌داند و در نقد آن دلایلی را ارائه می‌دهد که می‌توان در قالب دو نقد آنها را بازگویی کرد: دلیل نخست در واقع یک دلیل نقضی یا تاریخی است؛ یعنی ریاضی‌دانان عملاً اثباتهای غیرصوری دقیقی ارائه داده‌اند (Detlefsen, 2008, 20). دلیل دیگر دلیل ردّی است؛ یعنی می‌توان تعریف بدیل بهتری از دقّت ریاضی را، به‌خصوص در اثباتهای غیرصوری، ارائه داد؛ یعنی همان مفهوم مناسبی از دقّت که به قول هرش بتوان دربارهٔ انواع غیرصوری‌تر اثباتها نیز آن را به کار بست.

دتلفسن پیشنهاد رابینسون[1] را می‌پسندد: اثباتی دقیق است که شفافیت تبیینی داشته باشد (Detlefsen, 2008, 19). منظور آنها از شفافیت تبیینی رابطهٔ معناداری است که بین مقدمات و نتیجه برقرار است و ما به واسطهٔ آن می‌توانیم چرایی نتیجه را توضیح

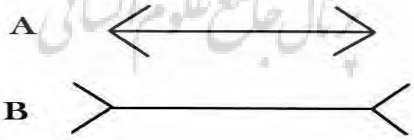
---

[1]. Robinson, J.

دهیم. آنها استدلال می‌کنند که درجهٔ دقّت اثباتها تابعی از میزان شکافهایی است که ریاضی‌دانان هنگام تبیین روابط ریاضیاتی، خواه‌ناخواه، به جا می‌گذارند. هرچه تعداد و فاصلهٔ این شکافهای تبیینی بیشتر باشد، از درجهٔ دقّت اثبات کاسته می‌شود. صوری‌سازی یا نمادی‌سازی هم در حقیقت تدبیری است که ریاضی‌دانان برای پرهیز از این شکافها به کار می‌گیرند؛ اما یگانه تدبیر نیست. ریاضی‌دانان به هر طریق دیگری هم، اگر بتواند این شکافها را به اندازهٔ کافی کمتر کنند، به دقّت کافی در اثبات خواهند رسید. به نظر می‌رسد این تلقی از دقّت، دربارهٔ اثباتهای تصویری نیز می‌تواند صادق باشد. مثلاً در تصویر ۱، چرایی گذر بین طرفین معادلهٔ مذکور آشکار است. حال اگر با این تلقی از مفهوم دقّت در اثباتهای ریاضیاتی به اثباتهای تصویری توجه کنیم، نمی‌توان از قبل و به‌طور مطلق، همهٔ آنها را نادقیق خواند. حتی می‌توان مدعی شد که تصاویر و نمودارها به‌جهت توانش تبیینی بالایی که دارند، اگر بجا و به‌درستی به کار روند، می‌توانند با پر کردن شکافهای تبیینی، دقیق‌ترین اثباتها را در اختیار ما بگذارند. بنابراین این ایراد نیز وارد نیست.

اثباتهای تصویری، اعتمادپذیر نیستند

اثباتهای تصویری، به‌علت گمراه‌کننده[1] بودن تصاویر، اعتمادپذیر نیستند و این شاید مهم‌ترین دلیلی باشد که معمولاً در ردّ این نوع از اثباتها بیان می‌شود. خطای مولر-لایر[2]، نمونهٔ معروف از خطاهای ادراکی تصویری است:



تصویر ۲: گرچه طول پاره‌خطهای A و B برابر است، واگرایی سرهای A و همگرایی سرهای B موجب شده است که طول آنها متفاوت به نظر رسد. این خطای ادراکی به‌علت آن است که ما پاره‌خطها را در یک چارچوب مکانی معین، یعنی زمینهٔ

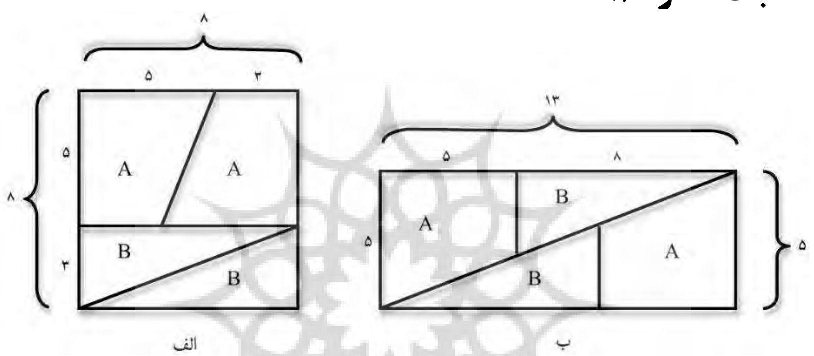
---
[1]. misleader
[2]. Muller-Lyer illusion

تصویر، درک می‌کنیم، نه به‌نحو مستقل و فی‌نفسه.

اما تصویر چگونه ممکن است اثبات را گمراه‌کننده سازد؟ اثبات تصویری زیر را در نظر بگیرید:

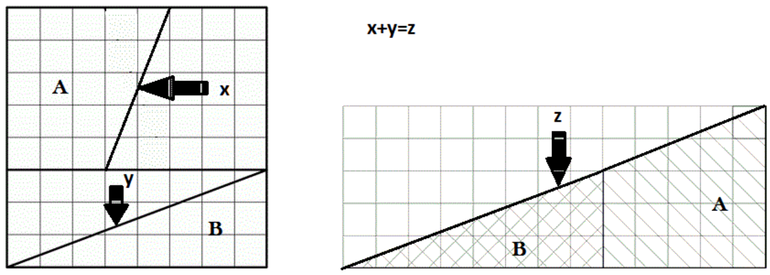
– **مدعای شمارهٔ ۲**: ۶۵=۶۴

– **اثبات شمارهٔ ۲**:



تصویر ۳: اگر ذوزنقه‌ها و مثلثهای شکل الف را به ترتیب بالا و به شکل ب بازچینی کنیم، به نظر می‌رسد که مساحت مجموع قطعات در طرفین باید مساوی باشد؛ یعنی: ۱۳ × ۵ = ۸ × ۸؛ یا ۶۵ = ۶۴.

به همین دلیل است که هیلبرت هشدار می‌دهد در استفاده از نمودارها و تصاویر مراقب باشیم: «... چون آنها به‌راحتی می‌توانند گمراه‌کننده باشند.» (Hilbert, 1894, 11). در مقابل، نمادها نه‌تنها گمراه‌کننده نیستند، بلکه ما با توسل به آنها می‌توانیم خطاهای تصویری را هم تبیین کنیم و حتی میزان خطا را نشان دهیم. برای این کار، تصاویر الف و ب را در صفحهٔ مشبکی از مربع‌هایی به مساحت یک واحد در نظر بگیرید:



تصویر ۴

با اعتماد به تصویر باید پذیرفت که اگر x و y در الف، به‌ترتیب وتر دو مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع (x، ۵، ۲) و (y، ۸، ۳) باشند، آنگاه x+y=z. برای بررسی این مدعا ابتدا x و y را به‌طور جداگانه، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، به دست می‌آوریم و سپس مجموع x+y آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt{2^2+5^2}+\sqrt{3^2+8^2}=\sqrt{29}+\sqrt{73}\approx 5.385+8.544=13.929$$

درحالی‌که z وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است با اضلاع (z، ۵، ۱۳) و بنابراین:

$$Z=\sqrt{5^2+13^2}=\sqrt{194}\approx 13.928$$

چشم ما از درک همین 0.001 واحد اختلاف ناتوان است و اختلاف شیب این دو مثلث به قدری تدریجی و ناچیز است که ما قادر به تشخیص آن به واسطهٔ ادراک حسی نیستیم و با کمک نمادها می‌توان این میزان از خطا و حتی بسیار کمتر از آن را تشخیص و نمایش داد.

اما آیا گمراه‌کنندگی مختص تصاویر است؟ برای پاسخ به این پرسش اجازه دهید کمی مفهوم گمراه‌کنندگی را واکاوی کنیم. برای این کار بار دیگر اثبات شمارهٔ ۲ را در نظر بگیرید. چه چیزی در آن ما را به نتیجهٔ عجیب و آشکارا نادرست ۶۵ = ۶۴ رسانده است؟ طبق استدلال هیلبرت و ریاضی‌دانان کلاسیک، اثبات تصویری شمارهٔ ۲، از یک سو وابستگی تعیین‌کننده به تصاویر الف و ب دارد و از سوی دیگر مساحت این دو تصویر اختلاف بسیار جزئی و نامحسوسی دارد. یعنی گمراه‌کنندگی تصاویر بیان

دیگری از خطاپذیری[1] ما در ادراک حسی است. حال باید ببینیم آیا ما فقط در بیان یا بررسی اثباتهای تصویری خطاپذیر هستیم یا در مواجهه با اثباتهای نمادی هم وضعیت مشابهی داریم؟ مثلاً اثبات نمادی زیر را در نظر بگیرید:

– **مدعای شمارهٔ ۳**: ۱=۲

– **اثبات شمارهٔ ۳**:

1. $a=b$
2. $a^2=ab$
3. $a^2-b^2=ab-b^2$
4. $(a+b)(a-b)=b(a-b)$
5. $a+b=b$
6. $b+b=b$
7. $2b=b$
8. $2=1$

ممکن است گفته شود خطایی که در اثبات نمادی شمارهٔ ۳ رخ داده صرفاً معلول شتابزدگی و کم‌دقّتی استدلال‌کننده است؛ یا، به بیان صورت‌گرایانه، خطای مذکور صرفاً معلول به‌کارگیری نادرست یک قاعدهٔ صوری در گذر از سطر ۴ به سطر ۵ است. اما چرا چنین توجیهی را فقط باید دربارهٔ خطاهای نمادی بپذیریم؟ آیا جز این است که در اثبات تصویری شمارهٔ ۲ نیز، بر خلاف اثبات تصویری شمارهٔ ۱، استدلال‌کننده دچار شتابزدگی و کم‌دقّتی شده است؟ آیا جز این است که در بازچینی قطعات نیز می‌توانستیم قواعد معینی را وضع کنیم تا مانع بازچینی قطعات با شیب‌های نامساوی شود؟ یا دست‌کم تقریبی بودن این‌همانی $x+y$ و z را آشکار کند؟

ممکن است گفته شود که با پذیرش تصاویر در مقام داوری، ما معرفت ریاضی خود را در معرض خطاهای ادراکی[2] قرار داده‌ایم و هیچ تضمینی برای مصونیت از آنها نداریم. این سخن البته درست است. این مدعا هم درست است که بگوییم خطاهای

---

[1]. fallibility
[2]. illusions

ادراکی دیداری[1] در اثباتهای نمادی منتفی است. اما مگر اثباتهای نمادی از هر نوع خطای ادراکی مصون هستند؟ ما با پذیرش نمادها در مقام داوری، در واقع معرفت ریاضی خود را در معرض انواع خطاهای ادراکی لفظی[2]، مثل خطای ناشی از تایپوگلاسمیا[3]، قرار می‌دهیم. برخی از خطاهای ادراکی نیز در کارند که در هر دو نوع نشانه، یعنی تصاویر و نمادها، محتمل هستند؛ مثل خطاهای ناشی از سوگیریهای شناختی[4]. اما نتیجه‌ای که باید از اینها بگیریم خطاباوری[5] در ریاضیات است، نه اعتمادناپذیری اثباتها یا شکاکیت افراطی در ریاضیات. آنچه اعتمادپذیری اثباتها را تضمین می‌کند وارسی‌پذیری آنهاست (همان ویژگی که در بند بعدی به سراغ آن خواهیم رفت)، نه خطاناپذیری آنها.

باز ممکن است گفته شود که استدلال‌کننده، گرچه در اثباتهای نمادی در معرض خطا است، اما استدلالهای نمادی *خوداصلاح‌گر* هستند و می‌توان دلیل یا علت خطا و حتی میزان خطا را به‌وسیلهٔ آنها نشان داد. مثلاً در اثبات شمارهٔ ۳ ، گذر از گام ۴ به گام ۵ متضمن به‌کارگیری نادرست یک قاعده است (طرفین تساوی را می‌توان بر هر عددی تقسیم کرد، مگر عدد صفر). همچنین خطای استدلال تصویری بالا در نادیده گرفتن

[1]. visual illusions

[2]. Verbal illusions (word illusions)

[3]. Typoglycemia

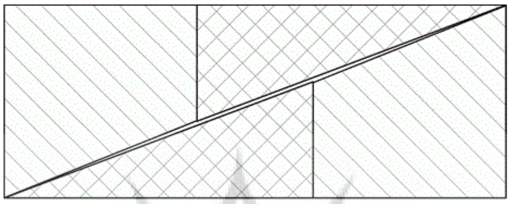
«تایپوگلاسمیا» یک اصطلاح ساختگی مرکب از «تایپو» به معنای *خطای تایپی* و «هیپوگلاسمی» به معنای *کم شدن قند خون* است. این اصطلاح برای اشاره به فرایند شناختی خاصی که هنگام خواندن نوشتار صورت می‌پذیرد، وضع شده است: اگر در یک متن حروف اول و آخر کلمات ثابت بمانند و بقیهٔ حروف درون کلمات جابه‌جا شوند، ذهن هنوز قادر است کلمات را تشخیص دهد و متن را به‌راحتی بخواند و درک کند. این پدیده گرچه سرعت درک متن را افزایش می‌دهد و مصرف انرژی لازم برای دریافت و پردازش اطلاعات نوشتاری را کاهش می‌دهد، اما احتمال خطاهای ادراکی نوشتاری را نیز افزایش می‌دهد؛ به‌طوری‌که بسیاری از خطاهای ویرایشی معلول همین پدیدهٔ شناختی است. اثباتهای نمادی نیز، به‌خصوص وقتی طولانی باشند، در معرض خطای ادراکی مشابهی قرار می‌گیرند؛ مثل خطایی که در اثبات شمارهٔ ۳ هست.

[4]. Attentional bias

[5]. fallibilism

اختلاف ۰/۰۰۱ واحد در جمع وترها، یا نادیده انگاشتن اختلاف شیب $\frac{3}{8}$ و $\frac{2}{5}$ است.

در دفاع از اثباتهای تصویری می‌توان گفت که تصاویر نیز، اگر به‌درستی به کار روند، دست‌کم در بعضی مواقع، می‌توانند علت و میزان خطا را نشان دهند. مثلاً تصویر زیر را در نظر بگیرید:



تصویر ۵

این تصویر به‌خوبی دلیل و میزان خطا را نشان می‌دهد. حتی این نیز فی‌نفسه، یعنی به‌نحو مطلق و پیشینی، اهمیّت ندارد که ما میزان خطا را در قالب عدد بازنمایی کنیم یا در قالب تصویر. اما سیطرهٔ کمیت در اندیشهٔ ریاضیات معاصر به حدی است که گویا شکاف بین وترهای دو مثلث در تصویر ۵ معنای معیّنی را منعکس نمی‌کند و این تنها ارقام هستند که معنادار هستند. اهمیّت و جایگاه رقم و تصویر کاملاً دگرگون خواهد شد اگر ما به جای چارچوب فکری صورت‌گرایی، چارچوب افلاطون‌گرایی را انتخاب کنیم.

شاید مخالفان بگویند که گمراه‌کنندگی و خطاپذیری اثباتهای تصویری یا اثباتهای نمادی قابل مقایسه نیست؛ زیرا اثباتهای تصویری همهٔ جزئیات را بیان نمی‌کنند و بسیار بر تعبیر بیننده استوار هستند و در واقع واجد رخنه‌ها و شکاف‌های فراوانی هستند. اما این ایراد نیز وارد نیست. اثباتهای نمادی، بر خلاف تصور عامیانهٔ ریاضی‌دانان، بسیار کلی‌تر و پرشکاف‌تر از آن هستند که نشان می‌دهند. در این زمینه، فیلسوفان نکات مهمی را گوشزد کرده و استدلالهای خوبی را ارائه داده‌اند. مثلاً فالیس (۲۰۰۳) ضمن معرفی مفهوم شکاف[1] در اثباتهای نمادی، سه نوع شکاف در اثباتهای نمادی را از هم متمایز کرده است. در تعریفی که او پیشنهاد می‌کند، شکاف عبارت است از «هر بخش از اثبات نوشته‌شده‌ای که صرفاً حاصل به‌کارگیری قواعد معتبر استنتاج روی سطرهای قبلی

1. gap

نیست» (Fallis, 2003, 58). فالیس نشان می‌دهد که در اغلب اثباتهای بالفعل که جامعهٔ ریاضی ارائه می‌کند، شکاف وجود دارد. او شکاف را به چند دسته طبقه‌بندی می‌کند (Fallis, 2003, 59):

- شکاف استنتاجی[1]: گاهی ریاضی‌دان زنجیرهٔ خاصی از گزاره‌ها را در بدنهٔ یک اثبات به کار می‌برد؛ بدون آنکه دلایل معینی در ذهن یا کاغذ برای آن بخش از اثبات داشته باشد.
- شکاف اضماری یا نهفته[2]: گاهی ریاضی‌دان زنجیرهٔ معینی از گزاره‌هایی را که در ذهن دارد، چه به دلیل سبک نگارش و چه به سبب اجمال و اختصار، صریحاً بیان نمی‌کند.
- شکاف ناپیموده[3]: گاهی ریاضی‌دان، همهٔ گزاره‌های یک زنجیره با بخشهای مشابه را جداگانه راستی‌آزمایی نمی‌کند؛ بلکه از درستی بخشی از آن و شباهت بخشهای دیگر، درستی کل زنجیره را نتیجه می‌گیرد.

در هر حال، اگر بخواهیم از گمراه‌کنندگی تصاویر، نامقبولیّت اثباتهای تصویری را نتیجه بگیریم، گرفتار دو مغالطهٔ «معیار دوگانه» و«تفسیر نادرست» شده‌ایم؛ زیرا اولاً گمراه‌کنندگی مختص تصاویر نیست و نمادها را نیز شامل می‌شود و بنابراین ما در مواجهه با نمادها نیز خطاپذیر هستیم. به تعبیر دیگر، این فقط معرفت دیداری[4] ما نیست که خطاپذیر است، بلکه معرفت نوشتاری[5] ما نیز چنین است. ثانیاً خطاپذیری[6] مانع مقبولیّت یک اثبات یا یک نوع اثبات نمی‌شود. همان‌طور که اشاره کردیم، آنچه

---

1. inferential gap
2. enthymematic gaps
3. untraversed gaps
4. Visual Knowledge
5. Verbal Knowledge

۶. خطاپذیری گاهی صفت یک منبع معرفتی، مثل ادراک حسی یا استدلال است، گاهی صفت خود معرفت و به‌طورکلی اندیشه، و گاهی نیز صفت شخص استدلال‌کننده یا به‌طورکلی اندیشنده است. اینجا هر سه نوع موصوف مورد نظر است.

موجب می‌شود ما در پذیرش اثباتهای تصویری تردید کنیم، نه گمراه‌کننده بودن آنها، بلکه خطاناباوری[1] ما است؛ یعنی هنوز این آموزهٔ دکارتی در نظام معرفتی ما باقی مانده که اگر یک باور موجه، تردیدپذیر باشد، معرفت نیست؛ درحالی‌که خطاناباوری اصلاً قابل دفاع نیست؛ چرا که ما را گریزی از خطاهای مختلف در مسیر انواع اندیشه و به‌خصوص استدلال کردن نیست. اگر ما خطاباوری[2] در ریاضیات را بپذیریم، از خطاپذیری اثباتها به اعتمادناپذیری و نامقبولیّت آنها نخواهیم رسید.

اثباتهای تصویری وارسی‌پذیر نیستند

به نظر می‌رسد که اگر ما بخواهیم اثباتهای تصویری را به طور کلی و پیشینی رد کنیم، باید نشان دهیم که آنها اساساً وارسی‌پذیر نیستند؛ زیرا وارسی‌پذیری شرط عینیت یک فرایند تحقیقی است و فقدان آن در حکم شخصی شدن و ذهنی شدن فرایند مذکور خواهد شد. حتی اعتمادپذیری نیز مستلزم وارسی‌پذیری است؛ زیرا در صورت وارسی‌ناپذیری یک فرایند تحقیقی، همواره احتمال تعبیرهای شخصی یا گامهای نادرست مغفول یا حتی آشکار شدن اقتضائات نامطلوب باقی می‌ماند. بنابراین اثبات، اگر وارسی‌ناپذیر باشد، اعتمادناپذیر است. البته وارسی‌پذیری اثبات لزوماً به معنای اعتبار آن نیست؛ همچنان‌که آزمون‌پذیری گزاره لزوماً به معنای صدق یا کذب آن نیست.

در نگاه نخست به نظر می‌رسد که حتی یک اثبات تصویری خوب، مثل اثبات شمارهٔ ۱، هرقدر هم به معنای وسیع کلمه دقیق باشد، یعنی شفافیت تبیینی بالایی داشته باشد، و از خطاهای ادراکی فرد استدلال‌کننده دور باشد، باز به دلیل این‌که همهٔ جزئیات در آن به زبان منطق محمولات بیان و آشکار نشده است و گامهای استدلال سطربه‌سطر مکتوب نشده است، امکان بررسی آن برای دیگران، یا دست‌کم دیگر اعضای متخصص جامعهٔ ریاضی، فراهم نشده است؛ یعنی این نوع از اثباتها وارسی‌پذیر نیستند.

اما این تمایزی که در بالا توصیف شد بسیار ساده‌انگارانه است؛ یعنی برای اینکه یک اثبات وارسی‌پذیر باشد لازم نیست که همهٔ جزئیات به زبان منطق محمولات بیان و

---

[1]. infallibilism
[2]. fallibilism

آشکار شود و گامهای استدلال سطربه‌سطر مکتوب شوند؛ زیرا اولاً اگر دربارهٔ اثباتهای نمادی نیز سختگیر باشیم و به شکافهایی که فالیس متذکر می‌شود توجه کنیم، خواهیم دید که اغلب اثباتهای نمادی به‌گونه‌ای هستند که عملاً وارسی همهٔ گامها در همهٔ آنها به‌وسیلهٔ اعضای جامعهٔ ریاضی ممکن نیست. برخی از آنها به دلیل مطول بودن و بسیار فنی و تخصصی بودن، و برخی نیز به دلیل فراوانی شکافهای اضماری و ناپیموده، عملاً غیر قابل وارسی هستند. ثانیاً تلقی مذکور از وارسی‌پذیری، مثل تلقی صورت‌گرایانه از دقّت ریاضی، انحصارطلبانه است؛ زیرا بر اساس تاریخ ریاضی، می‌توان نشان داد ریاضی‌دانان اثباتهایی را پذیرفته‌اند که به معنای فوق وارسی‌پذیر نیستند. مثلاً ریاضی-دانان اثباتهای رایانشی را پذیرفته‌اند و آن را واجد عینیت و اعتمادپذیری یافته‌اند؛ حال آنکه بخش مهمی از بدنهٔ اثبات‌های رایانشی وابسته به ماشین است. مهمتر از آن این که ریاضی‌دانان اثباتهایی را پذیرفته‌اند که عملاً در آنها تصویر بخش تعیین‌کننده‌ای از استدلال است؛ مثل اثباتهایی در هندسه که بر روش تقطیع یا بازچینی استوارند و ما در بخش‌های بعدی به‌نحو تفصیلی‌تر به آن خواهیم پرداخت. این واقعیتهای تاریخی نشان می‌دهند که وارسی‌پذیری اثباتها لزوماً مستلزم بیان آنها به زبان منطق محمولات نیست و حتی لزوماً به معنای قابلیت وارسی نمادهای ریاضی به‌وسیلهٔ اعضای جامعهٔ ریاضی نیست؛ بلکه ما عینیت و اعتمادپذیری اثباتها را با روشهای مختلفی می‌توانیم تضمین کنیم. پس ابتدا باید ببینیم وارسی‌پذیری دقیقاً به چه معناست؟

دربارهٔ مفهوم و انواع وارسی‌پذیری در دهه‌های اخیر، مطالعات فراوانی صورت پذیرفته است. مثلاً ادوین کلمن سه نظریهٔ عمدهٔ وارسی‌پذیری را این‌گونه از هم متمایز می‌کند (Coleman, 2008, 32-35):

- وارسی‌پذیری تیموچکویی: یک اثبات وارسی‌پذیر است اگر بتوان آن را به‌نحو معین به‌وسیلهٔ اعضای جامعهٔ ریاضی بررسی کرد.
- وارسی‌پذیری ویتگنشتاینی: یک اثبات وارسی‌پذیر است اگر بتوان آن را با اطمینان و به‌عنوان یک ساختار بازتولید کرد؛ به همان روشی که تصاویر را می‌توان تکثیر کرد.

- وارسی‌پذیری دکارتی: یک اثبات وارسی‌پذیر است اگر بتوان گامهای آن را با هم در آگاهی حاضر کرد.

حال این پرسش قابل طرح است که اثباتهای تصویری به چه معنا می‌توانند وارسی‌پذیر باشند؟ من برای پاسخ به این پرسش، ابتدا تلقی‌های مختلف دربارهٔ وارسی‌پذیری را، براساس دو رویکرد عمدهٔ فلسفی ناظر به اثباتها و کلاً ریاضیات، از هم جدا و بازتعریف می‌کنم:

۱. وارسی‌پذیری ناواقع‌گرایانه: اثبات ریاضی، به‌مثابهٔ فرایند تبدیل نمادها وارسی‌پذیر است، ا.ت.ا بتوان گامهای آن را بررسی کرد تا از درستی قواعد نحوشناختی تبدیل، در آن مطمئن شد.

۲. وارسی‌پذیری واقع‌گرایانه: اثبات ریاضی، به‌مثابهٔ فرایند راستی‌آزمایی یک مدعا وارسی‌پذیر است، ا.ت.ا بتوان گامهای آن را بررسی کرد تا از درستی قواعد معناشناختی ارزش‌دهی، در آن مطمئن شد.

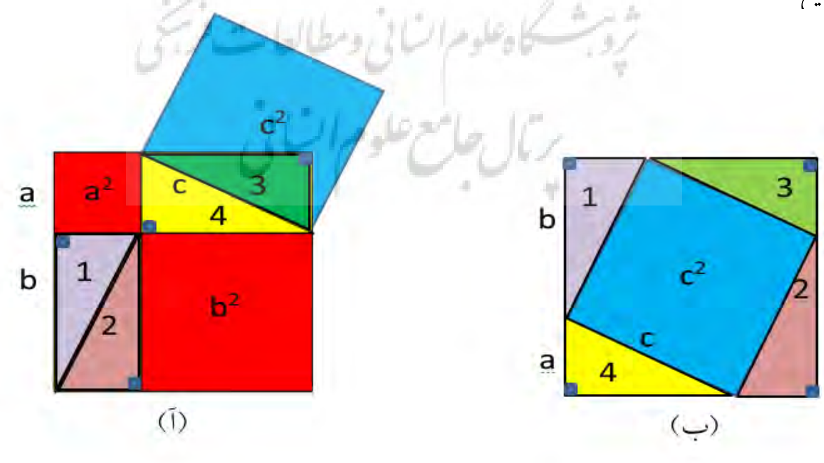
به نظر می‌رسد که وارسی‌پذیری ویتگنشتاینی و دکارتی، به‌ترتیب، ناواقع‌گرایانه و واقع‌گرایانه هستند. تلقی تیموچکو نیز به قدری کلی صورت‌بندی شده است که هردو را شامل می‌شود. حال دوباره به سراغ این پرسش می‌رویم که اثباتهای تصویری به چه معنا می‌توانند وارسی شوند؟ تصاویر را اگر صرفاً به‌مثابهٔ یک شیء تلقی کنیم، مطمئناً قابل وارسی نیستند؛ همچنان که نمادها نیز تنها در ارتباط معینی که با یکدیگر یا با معنای منطقی، یعنی ارزش صدقشان، دارند قابل وارسی‌اند. به‌طورکلی علائم، اعم از نمادها یا تصاویر، اگر قابل تعبیر و تحلیل به دو بخش مقدمه -یا مقدمات- و نتیجه باشند، در واقع می‌توانند استدلال تلقی شوند. چرا که استدلال یعنی فرایند گذر از مقدمه -یا مقدمات- به نتیجه. وارسی کردن نیز عملی است که ما دربارهٔ گامهای این فرایند انجام می‌دهیم. با این توضیحات، به نظر می‌رسد که ما می‌توانیم گامهای یک اثبات تصویری را به معنای واقع‌گرایانهٔ کلمه وارسی کنیم؛ یعنی بخشهایی از یک تصویر، مثل تصویر شمارهٔ ۱، را در مراحل معیّن به عنوان مدعیاتی که در مقام مقدمه هستند در نظر بگیریم و ارزش صدق این مدعیات را تعیین کنیم؛ سپس بخش دیگری از تصویر را، به عنوان مدعایی

که در مقام نتیجه است، لحاظ کنیم و ارزش صدق آن را بررسی کنیم.

اثباتهای تصویری جزئی هستند

یکی از اتهاماتی که به اثباتهای تصویری وارد می‌شود این است که آنها جزئی هستند. دتلفسن با ارجاع به برخی آثار فیلسوفان نامدار، مثل جان لاک، برکلی و هیوم، دیدگاه آنان دربارهٔ نقش تصاویر در ریاضیات را این‌گونه بیان می‌کند: حقایق ریاضی نوعاً حقایق کلی هستند؛ درحالی‌که نمودارها اشکالی جزئی هستند و استدلالی که بر امر جزئی استوار باشد در حکم تمثیل است نه قیاس، و بنابراین نمی‌تواند نقش توجیهی در ریاضیات ایفا کند (Detlefsen, 2008, 20).

باروایز و اچمندی در رد این اتهام، جنبه‌های عَرَضی یا تصادفی تصاویر را از جنبه‌های ضروری یا اجتناب‌ناپذیر جدا می‌کنند و استدلال می‌کنند که اگر نقش توجیهی تصاویر با توسل به جنبه‌های عرضی تصاویر باشد حق با مخالفان است؛ اما اگر استدلال تصویری بر جنبه‌های ضروری تصاویر استوار باشد، واقعاً توانایی مسجل کردن حقایق کلی را دارد. آنان برای اثبات مدعای خود مثالهایی را از تاریخ ریاضی یادآوری می‌کنند که چنین وضعیتی دارند. یکی از آنها اثبات قضیهٔ فیثاغورس با استفاده از روش بازچینی یا تقطیع است.



تصویر شمارهٔ ۶:

طبق (آ): $(a+b)^2=2ab+a^2+b^2$ و طبق (ب): $(a+b)^2=c^2+4ab/2=\ c^2+2ab$. با

مقایسهٔ این دو معادله و به‌کارگیری قاعدهٔ تساویهای جبری، نتیجهٔ مطلوب ($a^2+b^2=c^2$) به دست می‌آید و اثبات تمام است.

به عقیدهٔ آنان می‌توان گفت: ۱- این اثبات به‌وضوح یک اثبات مشروع است. ۲- این اثبات ترکیبی است از استخدام هندسی تصاویر و استخدام جبری نمادها. ۳- تصاویر نقش تعیین‌کننده‌ای در این اثبات ایفا می‌کنند. ۴- به‌وضوح از ویژگیهای عَرَضی تصاویر استفاده نشده است (Barwise and Etchemendy, 1991, 12). باروایز و اچمندی در توضیح دیدگاه خود از مفهوم یکریختی[1] استفاده می‌کنند. از نظر آنان یک نمودار خوب نموداری است که با وضعیت بازنمایی‌شده یکریخت -یا دست‌کم همریخت- باشد (Barwise and Etchemendy, 1991, 22). به نظر می‌رسد که تعمیم حکم از یک شکل جزئی به یک رابطهٔ کلی نیز، در واقع، به موجب همین یکریختی یا همریختی قابل تبیین باشد.

---

[1]. دو ساختار را یکریخت (isomorphic) گوییم هرگاه بین مجموعه‌ها و عملگرهای آن دو ساختار، یک تابع یکریختی برقرار باشد؛ یعنی مثلاً در جبر مجرد فرض کنید (G,*) و (H,#)دو گروه باشند؛ تابع $\varphi: G \rightarrow H$ را یکریختی (isomorphism) گوییم هرگاه یک‌به‌یک و پوشا باشد و این رابطه برقرار باشد:

$$\forall a,b \in G \ \ \varphi(a*b)= \varphi(a)\# \varphi(b)$$

یکریختی منحصر به ساختارهای جبری نیست. مثلا فرض کنید علی و حسن و رضا دور میزی نشسته‌اند؛ به‌طوری‌که رضا سمت چپ حسن، و حسن نیز سمت چپ علی است. همچنین فرض کنید شما سه حیوان خانگی دارید: سگ، پرنده و خرگوش؛ به‌طوری‌که خرگوش پرنده را می‌ترساند و پرنده سگ را و سگ نیز خرگوش را می‌ترساند. از منظر ریاضیاتی می‌توان گفت که بین دو ساختار (**سمت چپ**,{**علی، حسن، رضا**})=A و (***می‌ترساند***,{**سگ، پرنده، خرگوش**})=B یکریختی برقرار است. اگر تعداد اعضای A و B، یعنی انسانها و حیوانات، مساوی نباشد، همریختی برقرار است. براون در تقریر موضع باروایز و اچمندی از این مثال استفاده می‌کند و نشان می‌دهد که به این ترتیب «تشابه ساختاری» بین ساختارهای تصویری و انتزاعی را براساس مفهوم یکریختی و همریختی می‌توان صورت‌بندی کرد.

این تبیین، موافقان و مخالفانی دارد؛ از جمله اریک هَمـر[1] کـه آن را مـی‌پـذیرد و در فصل اول کتابش «منطق و اطلاعات دیداری» (۱۹۵۵) به‌تفصیل توضیح مـی‌دهـد. امـا بـه عقیدهٔ براون، این ایده لزوماً درست نیست. مثلاً اگر به همان مثال ابتدای مقالـه برگـردیم، خواهیم دید که رابطهٔ * به ازای n=7 برقرار اسـت و طبـق تبیینـی کـه بـاروایز و دیگـران پیشنهاد می‌دهند، حداکثر می‌توان مدعی شد که یک یکریختی بین این ساختار تصویری و یک ساختار انتزاعی با همان تعداد عضو، یعنی اعداد ۱ تا ۷، برقرار اسـت؛ درحـالی‌کـه ما به یک یکریختی با همهٔ اعداد طبیعی نیاز داریم. به تعبیر دیگـر، مـا بـرای گـذر از ایـن همریختی به یکریختی با کل اعداد، بـه دلیـل جداگانـه‌ای نیـاز داریـم. بـراون در عـوض پیشنهاد دیگری دارد:

بنابراین قصد دارم پیشنهاد کاملاً متفاوتی بدهم. حدس جسورانهٔ من (به تعبیـر پـوپری) چنین است: *بعضی از «تصاویر» واقعاً تصویر نیستند، بلکه پنجره‌هایی به بهشـت افلاطـون-اند*. نمودار مربوط به نظریهٔ اعـداد [(تصـویر ۱)] یقینـاً یـک بازنمـایی بـرای حالـت n= ۷ است؛ اما یک بازنمایی برای حالت کلی نیست. این نمودار، برای اثبات حالـت کلـی، بـه گونه‌ای دیگر عمل می‌کند؛ چیزی شبیه به یک ابزار. این دیدگاه، البته دیـدگاهی واقـع-گرایانه به ریاضیات است، و نه دیدگاهی واقع‌گرایانه به تصاویر. همچنان‌که تلسکوپ‌هـا به چشم غیرمسلح کمک می‌کنند، نمودارها نیز ابزارها (و نه بازنمایی‌ها)یی هستند کـه بـه چشم غیرمسلحِ ذهن کمک می‌کنند (Brown, 2008, 40).

براون با برخی تمثیلها تلاش می‌کند این بیان استعاری را پذیرفتنی‌تر سـازد. مـثلاً یـک تصویر در نقش توجیهی، مثل تصویر ۱، را با یک تـابلو نقاشـی، مثـل نقاشـی *ناپلئون* اثـر دیوید (در این تابلو، ناپلئون با هیبت مصمم، سوار بر اسـبی سـرزنده انگشـت خـود را بـه سمت جلو نشانه رفته است)، مقایسه کنید. به عقیدهٔ براون همچنان‌که بسـیاری از زیبـایی-شناسان، مثل آرنهایم، دو کارکرد مختلف برای این تابلو قائل‌اند، ریاضی‌دانـان نیـز مـی-توانند برای تصویر ۱ دو کارکرد در نظر بگیرند: تابلوی دیوید *تصویری*[2] است کـه یـک

[1]. Eric Hammer
[2]. a picture

چیز *ملموس*، یعنی ناپلئون، را بازنمایی می‌کند و درعین‌حال *نمادی*[1] است که ما از طریق آن، اموری *انتزاعی*، مثل رهبری و شهامت و ماجراجویی، را می‌بینیم. تصویر ۱ نیز، از یک سو، تصویری است که درستی رابطهٔ * را برای حالت خاص، یعنی n=7 بازنمایی می‌کند، و درعین‌حال نمادی است که ما از طریق آن می‌توانیم درستی رابطهٔ * را برای هر n ببینیم (Brown, 2008, 44).

پیشنهاد براون برای لحاظ کردن ابزاری تصاویر و نمودارها، و لحاظ کردن تصاویر به‌مثابهٔ پنجره‌هایی رو به بهشت افلاطونی، زمانی پذیرفتنی خواهد بود که ما قبلاً معقولیت وجود یک قوهٔ ادراکی به نام «چشم ذهن» یا عمل ادراکی «دیدن هستومندهای ریاضیاتی» را پذیرفته باشیم. حدس جسورانهٔ براون، گرچه قدرت تبیینی خوبی دارد، اما به مفروضات سهمگینی نیز وابسته است. براون خود بر این نکته واقف است و گرچه ادعا می‌کند که ابایی از این بیان استعاری و استدلال ذوقی ندارد، اما به نظر می‌رسد که خود عملاً از این پاسخش راضی نیست؛ زیرا در نهایت، تلاش می‌کند با یک موضع‌گیری پراگماتیستی، نشان دهد که پذیرش این نوع از اثباتها در مقایسه با نادیده گرفتن آنها مقبول‌تر است (Brown, 2008, 47).

اما به نظر من ایراد ششم، یعنی جزئی بودن تصاویر، راه حل بسیار آسان‌تری دارد. اتهام جزئی بودن تصاویر بیان نادرستی از ایراد پنجم، یعنی عدم وارسی‌پذیری، است و ایراد پنجم نیز به نظر می‌رسد بنابر دلایلی که برشمردیم وارد نیست؛ یعنی در واقع اچمندی، باروایز، هَمِر و براون از ابتدا در یک زمین نامربوط وارد بازی شده‌اند. بنابراین کافی است در اینجا نشان دهیم که اتهام ششم (جزئی بودن) بیان نادرستی از اتهام پنج (وارسی‌پذیری) است. برای این کار من مفهوم جزئی بودن و مفهوم وارسی‌پذیری را مقایسه می‌کنم:

جزئیت: یک مفهوم، جزئی است هرگاه کلی نباشد؛ یعنی قابل حمل بر مصادیق کثیر نباشد (معنای اول)؛ یا اینکه، یک جمله، جزئیه یا شخصیه است هرگاه صدق‌ساز آن یک واقعیت کلی، یا کل اعضای یک مجموعهٔ معیّن بیش از یک عضوی، نباشد (معنای دوم).

---

[1]. a symbol

وارسی‌ناپذیری: یک فرایند، وارسی‌ناپذیر است هرگاه نتوان گامهای آن را بررسی کرد تا از درستی قواعد نحوشناختی تبدیل، در آن مطمئن شد (تعریف ناواقع‌گرایانه)؛ یا اینکه، نتوان گامهای آن را بررسی کرد تا از درستی قواعد معناشناختی ارزش‌دهی، در آن مطمئن شد (تعریف واقع‌گرایانه).

حال روشن است که تصویر در یک اثبات، یک فرایند یا بخشی از یک فرایند است، نه یک مفهوم یا یک جمله. تصویر البته به‌خودی‌خود، یک فرایند نیست؛ اما وقتی قرار باشد از آن برای گذر از مقدمات به نتیجه استفاده شود، باید به‌مثابهٔ یک فرایند لحاظ شود. در حقیقت، وارسی‌پذیری، یک صفتِ ممکن برای فرایند استدلال است و صفت متناظر با آن برای جملات، اثبات‌پذیری یا ابطال‌پذیری و نظایر آن است.

بنابراین اگر منظور ما از «تصاویر»، فرایند استدلالِ ملحوظ در تصاویر باشد، آنگاه جزئی بودن تصاویر تنها یک معنای محصل می‌تواند داشته باشد و آن اینکه *فرایند استدلالی خاصی در زمان و مکان خاصی تحقق یابد*؛ یعنی ما با یک فرایند موردی[1] مواجه باشیم. اما روشن است که آنچه برای اعتبار و وثاقت و عینیت فرایندهای استدلالی حائز اهمیت است، بررسی‌پذیری (اگر استدلال پسینی باشد) یا وارسی‌پذیری (اگر استدلال پیشینی باشد) آنها است، نه موردی بودن یا نوعی[2] بودن آنها. به تعبیر دیگر، اگر موردی بودن یک اثبات تصویری ایراد محسوب شود، تر و خشک با هم خواهد سوخت؛ زیرا این ایراد بر اثباتهای نمادی موردی نیز وارد خواهد بود.

دربارهٔ وارسی‌پذیری اثباتها باید به یک نکتهٔ دیگر نیز توجه کرد: اثبات قضیه‌ای که متضمن بی‌نهایت مقدار است، مثل معادلهٔ *، گرچه مستلزم بی‌نهایت گام است، اما آنها گامهای بالفعل نیستند و اساساً چنین چیزی قابل تصور نیست. بنابراین وارسی چنین اثباتی نیز متضمن وارسی یک بی‌نهایت بالقوه است، نه بی‌نهایت بالفعل. چنین تمایزی تقریباً در همهٔ فلسفه‌های ریاضی به چشم می‌خورد؛ یعنی فیلسوفان در تبیین وارسی بی‌نهایت گام در اثباتها، به‌نوعی این دو نوع بی‌نهایت را از هم متمایز می‌سازند و به بالقوه بودن آنها

---

1. Token process
2. Type process

تأکید می‌کنند (Marion, 1998, 187). به‌خصوص این تعبیر ویتگنشتاین حتی برای واقع‌گرایان نیز کارساز و روشنگر است که «بی‌نهایت ویژگی یک قانون یا قاعده است، نه ویژگی یک مجموعه از مصادیق» (Marion, 1998, 182). بنابراین آنچه در فرایند یک اثبات مهم و تعیین‌کننده است، تکرار و تداوم بالقوهٔ یک ساختار نمادی یا تصویری است، نه تکرار و تداوم بالفعل آن؛ و آنچه در تعیین اعتبار یا صحت یک اثبات مهم و تعیین‌کننده است، وارسی‌پذیری این تکرار و تداوم است، نه نحوهٔ بازنمایی (نمادی یا تصویری) آن، و نه موردی (جزئی) یا نوعی (کلی) بودن آن.

اثباتهای تصویری مشروع نیستند

ممکن است گفته شود که اثباتهای تصویری عملاً مورد اعتنای ریاضی‌دانان نیستند و این به معنای عدم مشروعیّت نهادی آنهاست و بنابراین نباید آنها را پذیرفت. در تحلیل و نقد این ایراد باید توجه کرد که اولاً توسل به مفهوم «مشروعیّت» نهادی در رد اعتبار یک اثبات یا یک نوع اثبات استلزامات خاصی دارد که باید آنها را نیز پذیرفت؛ از جمله اینکه باید دانش ریاضیات را به‌عنوان یک امر اجتماعی، یعنی واقعیتی که متأثر از ارزشهای جامعهٔ ریاضی‌دانان است، تحلیل کرد. این تذکر بیشتر از آن روست که گاهی اعضای جامعهٔ ریاضی با یک تلقی دوگانه و متناقض دربارهٔ مقبولیّت اثباتهای تصویری داوری می‌کنند؛ یعنی از یک سو، با یک نگاه طبیعی و افلاطونی، ریاضیات را امری مستقل و آزاد از ارزشهای ریاضی‌دانان می‌پذیرند و از سوی دیگر، نامقبولیّت آن را نه با توسل به ایرادهای روش‌شناختی یا منطقی یا معرفت‌شناختی، بلکه با توسل به مفهوم جامعه‌شناختی «مشروعیّت» رد می‌کنند. مثلاً یکی از پیامدهای توسل به جنبهٔ نهادی و اجتماعی ریاضیات این است که مقبولیّت یک نظریه یا روش در علم تابعی از *اثر ماتیو*[1] است. اثر ماتیو اصطلاحی است که رابرت مرتون آن را ابداع کرده و نقش شهرت افراد

[1]. Matthew Effect

را در مقبولیّت مدعیات یا استدلالهای علمی او توصیف می‌کند[۱]. بنابراین حتی اگر بپذیریم که اثباتهای تصویری نامشروع هستند و با این دلیل آنها را نامقبول بدانیم، باید دست از تلقی کلاسیک، یعنی تلقی غیرتاریخی از ریاضیات، نیز برداریم. اما این تنها پیامد چنین حکمی نیست. اگر ما اثباتهای تصویری را به دلیل نامشروعیّت نهادی نامقبول بدانیم، باید این را نیز بپذیریم که این وضعیت همواره ممکن است با مواضع و آثار ریاضی‌دانان برجسته، مثل برندگان فیلدز، دگرگون شود. این امر نه‌تنها بعید نیست، بلکه به دو دلیل تاریخی می‌توان مدعی شد که عملاً اتفاق افتاده است.

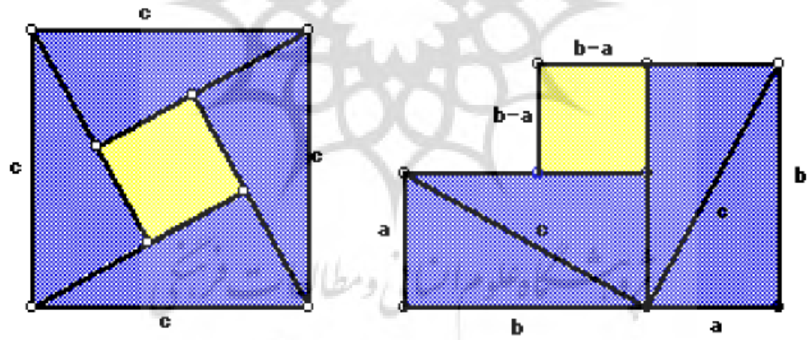
دلیل اول آن دسته از نظریه‌های ریاضی است که بر روش و رویکردهای ناصورت-گرایانه و غیرکلاسیک و ازجمله اثباتهای تصویری رایانشی استوارند؛ مثل نظریهٔ آشوب و هندسهٔ فراکتالها. مدعیات و حدسها در این نظریه‌های ریاضی، از یک سو بر تصاویری که رایانه ترسیم می‌کند استوارند، از سوی دیگر، این مدعیات و الگوهای استنتاجی با به‌کارگیری و موضع‌گیری ریاضی‌دانان برجسته و به‌خصوص برندگان فیلدز، تلویحاً و تصریحاً مشروعیّت یافته‌اند. براون گزارش جامعی از طرفداران این نگرشهای غیرکلاسیک را عرضه کرده است (Brown, 2008, 47). دلیل دوم نیز تاریخی است، اما به خود ریاضیات کلاسیک مربوط می‌شود و بنابراین، اگر به‌خوبی مستند و صورت-بندی شود، بسیار کمتر از دلیل اول مناقشه‌آمیز خواهد بود؛ یعنی می‌توان گفت که نه‌تنها در ریاضیات غیرکلاسیک، بلکه در ریاضیات کلاسیک نیز، اولاً ریاضی‌دانان عملاً اثباتهای تصویری را به کار گرفته‌اند و ثانیاً برخی از ریاضی‌دانان باصراحت به مقبولیّت این نوع اثباتها و نقشهای تعیین‌کنندهٔ تصاویر در نظریه‌ها و قلمروهای کلاسیک ریاضیات اذعان کرده‌اند. در اینجا به‌ترتیب، ابتدا به برخی شواهد تاریخی و سپس برخی مواضع ریاضی‌دانان اشاره می‌کنم.

شواهد تاریخی: به‌لحاظ تاریخی، اثباتهای آمیخته، یعنی نمادی–تصویری، پدیدهٔ

---

[۱]. او نام این نظریه‌اش را از انجیل متّی Matthew گرفته است: «به کسی که داراست باز هم داده می‌شود، تا آنچه دارد بیشتر شود، و از کسی که چیزی ندارد، ستانده می‌شود تا آن مقدار کمی هم که دارد کمتر شود»، آیهٔ ۲۹ ، فصل ۲۵ انجیل متی.

جدیدی نیستند و در واقع بسیاری از اثباتهای هندسی اقلیدس از این نوع هستند؛ یعنی اثباتهای فراوانی درکارند که آگاهانه یا ناآگاهانه بخشی از بار توجیه یا اقناع در آنها به دوش تصاویر هستند. باروایز و اچمندی مثالهایی را از تاریخ ریاضی می‌زنند و نشان می‌دهند که آنها، در عین مشروعیّتشان، بر تصاویر استوارند. یکی از آنها اثبات قضیهٔ فیثاغورس با استفاده از روش بازچینی یا تقطیع است (Barwise and Etchemendy, 1991, 12). افزون بر اثباتهای آمیخته، می‌توان ردپای اثباتهای تصویری ناب یا بی‌کلام را نیز دست‌کم تا ۸۰۰ سال پیش دنبال کرد. یکی از این نوع اثباتها متعلق به ریاضی‌دان هندی قرن ۱۲، معروف به بهاسکارای دوم[1]، برای قضیهٔ فیثاغورس است. او در کتاب معروف خود «لیلاواتی[2]» یک اثبات بی‌کلام برای قضیهٔ فیثاغورس عرضه می‌کند؛ یعنی تصویری مشابه با شکل زیر رسم می‌کند و در کنار آن تنها یک کلمه می‌نویسد: بنگر! (Burton, 2006, 109).



تصویر شمارهٔ ۷

در واقع با حسابی‌سازی آنالیز در قرن ۱۹ بود که تلاشها برای کاستن نقش توجیهی و اقناعی شهود و تصویر در اثباتهای ریاضی بیشتر شد و اثباتها صوری‌تر و لفظی‌تر شدند. بااین‌حال، تصاویر تا دههٔ هشتاد قرن ۱۹ همچنان نقشهای مهمی، نه‌تنها در هندسه، بلکه در سایر قلمروها مثل حسابان و حتی منطق ریاضی، ایفا می‌کردند. مثلاً جان ون[3] در «منطق نمادی» (۱۸۸۱) از نمودارها برای توجیه مدعیات یا تعیین اعتبار استنتاجها در

---

[1]. Bhaskara II
[2]. Lilavati (Līlāvatī)
[3]. John Venn

نظریهٔ مجموعه‌ها استفاده می‌کرد. اما جریان صوری‌سازی بیش از پیش قدرت گرفت و هیلبرت در «مبانی هندسه» (۱۸۹۹) موفق شد هندسه را به‌طورکامل اصل موضوعی کند. از دههٔ پایانی قرن نوزدهم به این سو، به علت غلبهٔ صورت‌گرایی، تصاویر و نمودارها، مثل نمودارهای ون، صرفاً ابزاری کمکی روان‌شناختی، یعنی برای تقریب به ذهن، قلمداد می‌شد. اما این روند از نیمهٔ دوم قرن بیستم کم‌کم کندتر شد و به‌خصوص از دههٔ پایانی قرن بیستم، جریان معکوسی در جهت به رسمیت شناختن اثباتهای تصویری آغاز شده است.

مواضع ریاضی‌دانان کلاسیک: تحقیقات خوبی دربارهٔ فراگیر شدن اثباتهای تصویری و به رسمیت شناختن آنها انجام گرفته که من از میان آنها به گزارش‌های خانم هانا اشاره می‌کنم. هانا که مطالعات وسیعی در این حوزه انجام داده است، دربارهٔ دگرگونی مفهوم سنتی صورت‌گرایانهٔ اثبات در نزد اعضای جامعهٔ ریاضی و نظر آنها دربارهٔ نقش عوامل غیرنمادی در قدرت توجیهی و اقناعی اثباتها می‌گوید:

> در دو دههٔ اخیر ریاضی‌دانان و معلمان ریاضی فراوانی این عقیده را که مهم‌ترین جنبهٔ ریاضیات همان نوع استدلال قیاسی است که در اثباتهای صوری به اوج می‌رسد، به چالش کشیده‌اند. در نظر آنها چیزهای بسیار بیشتری از سیستمهای صوری در ریاضیات وجود دارند. ریاضیات اثباتهایی با درجهٔ اعتبار صوری مختلف را به خود راه داده است و بااین‌حال هنوز به همان اندازه قابل قبول است که بود. گذشته از این، ریاضی‌دانان موافق‌اند که اگر یک اثبات فقط به‌موجب صورتش، و فارغ از محتوایش، معتبر باشد تنها اندکی به فهم ما در بارهٔ آن موضوع می‌افزاید و حتی شاید ذره‌ای در اقناع‌کنندگی آن تغییر ایجاد نکند (Hanna, 1989, 20).

اثباتهای تصویری خودبسنده نیستند

در گفتگو با اعضای جامعهٔ ریاضی، هنگام دفاع از اثباتهای تصویری، متوجه خواهیم شد که به باور بعضی از آنان، همواره باید یک اثبات صوری بالفعل یا بالقوه حامی یک اثبات تصویری در کار باشد و بنابراین اثباتهای تصویری نوع اصیل و مستقلی نیستند. مثلاً ما اثبات شمارهٔ ۱ را به این دلیل می‌پذیریم که دست‌کم یک اثبات صوری معتبر، با روش استقرای ریاضی، برای آن سراغ داریم، به‌طوری‌که این اثبات تصویری تنها

الهام‌بخش آن اثبات صوری است یا تبیین تصـویری آن اسـت، امـا بـه‌خـودی‌خـود هـیچ اصالتی ندارد.

این ویژگی اثباتهـای تصـویری را مـی‌تـوانیم خودنابسـندگی بنـامیم. در واقـع ادعـای مخالفان این است که اثباتهای تصویری را نمی‌توان به‌مثابهٔ یـک نـوع اصـیل از اثباتهـای ریاضی پذیرفت، چون آنها خودنابسنده‌اند. به نظر می‌رسد که در اینجا بایـد بـین دو نـوع خودنابسندگی تمایز قائل شویم. گاهی مخاطب، یـک اثبـات یـا یـک نـوع اثبـات را، بـه علت عدم تجویز در نظام آموزشی یا به علت نامتعـارف یـا نامشـروع بـودن، نمـی‌توانـد، مستقل از هر اثبات پشتیبان دیگری، بپذیرد. گاهی نیز مخاطب، یک اثبـات یـا یـک نـوع اثبـات را، بـه دلیـل فقـدان هنجارهـا یـا معیارهـای روش‌شـناختی، مثـل ویژگـی‌هـای وارسی‌پذیری یا دقّت یا اعتمادپذیری، نمی‌تواند، مستقل از هـر اثبـات پشـتیبان دیگـری، بپذیرد. این‌دو را، به‌ترتیب، خودنابسندگی روان‌شناختی و روش‌شناختی می‌نامیم.

به نظر می‌رسد با توجه به دفاعی که از دقّت و وارسی‌پذیری و اعتمادپـذیری اثباتهـای تصویری به عمل آوردیم، اگر کسی به خودنابسـندگی اثباتهـای تصـویری معتقـد باشـد، باید مدعای او را به معنای روان‌شناختی کلمه تحلیل کنیم؛ یعنی اثباتهای تصویری صـرفاً به علت عدم آموزش در مدارس و نظام آموزشی یا به علت نامتعارف بـودن یـا نامشـروع بــودن، خودنابســنده بــه نظــر مــی‌رســند. بســیاری از فیلســوفان ازجملــه ویتگنشــتاین (Bosanquet, 1976, 38) و رزنیک به این نکته تصـریح کـرده‌انـد. رزنیـک در مقالـهٔ «اثبات به‌مثابهٔ منبع صدق» مدّعی است که یک اثبات ازآن‌رو موجب تسجیل یـک قضـیه می‌شود که فرایندی را برای استنتاج قضیه معرّفی می‌کند که قبلاً آموزش داده شده است (Resnik, 1992, 1).

اما این مدعا نیز حداکثر مستلزم این نتیجه اسـت کـه اثباتهـای تصـویری، نـه بـه دلیـل ایرادهای درونی و اساسی تصاویر، بلکه به علت ارزشهای نظـام آموزشـی ناخودبسـنده و نامقبول هستند. البته همین نتیجه‌گیری هم، به‌لحاظ تاریخی، قابل دفاع نیسـت؛ زیـرا چـه-بسیار اثباتهای آمیخته، یعنی اثباتهای نمادی–تصویری، که در آنها بخشـی از بـار اقنـاع و توجیه به دوش نمادها و بخشی نیز به دوش تصاویر است. یعنی درواقع اثباتهای تصـویری پیش از این هم در نظر ریاضی‌دانان مشروعیّت و مقبولیّت داشتند و منحصر کردن اثباتهـا

به اثباتهای صوری یا نمادی در واقع یک حکم «جزمی» است که در قرن بیستم صادر شده است.

اثباتهای تصویری فراگیر نیستند

یکی دیگر از مقاومت‌های ریاضی‌دانان در مقابل اثباتهای تصویری محدودیت‌های ذاتی این نوع اثباتها در مقایسه با اثباتهای نمادی است. این محدودیتها در واقع به دو نوع عمده قابل تحویل‌اند: عدم فراگیری و عدم زایایی.

اگر ما نیز مانند راجر نلسون تلاش کنیم تا اثباتهای تصویری را جمع‌آوری کنیم، شاید تعداد آنها فراتر از چند جلد کتاب نباشد و این با حجم انبوه اثباتهای نمادی اصلاً قابل مقایسه نیست. اما این ایرادی نیست که به مقبولیّت اثباتهای تصویری کوچک‌ترین آسیبی وارد کند. این در حقیقت مغالطهٔ دلیل بی ربط است که ممکن است ما مرتکب شویم؛ چون کسی تا کنون ادعا نکرده است که همه یا اغلب اثباتهای ریاضی را می‌توان به روش تصویری نیز اثبات کرد؛ همچنان‌که همهٔ قضایا را نمی‌توان و لازم نیست که با روش استقرایی یا ساختی اثبات کرد. به همین دلیل است که براون نیز هنگام دفاع از اثباتهای تصویری تأکید می‌کند که تصاویر تنها در برخی حالات به‌مثابهٔ شواهد و قرائن دقیق عمل می‌کنند. «ادعای من این نیست که همیشه چنین شواهد دقیقی در کار است، یا اینکه در هر مورد خاصی وجود تصاویر هم لازم باشد» (Brown, 2008, 199).

بااین‌حال، نباید اثر ماتیو را فراموش کنیم. اگر ریاضی‌دانان سرمایه‌های فکری خود را در این مسیر صرف کنند، مسلماً حجم بیشتری از اثباتهای تصویری را شاهد خواهیم بود.

اثباتهای تصویری زایا نیستند

نوع دیگر محدودیت اثباتهای تصویری، نه به میزان شمول و فراگیری آنها، بلکه به نقش توسیعی و تولیدی این نوع اثباتها مربوط می‌شود. ما می‌دانیم که بسیاری از مفاهیم و روشها و الگوها و نتایج، حاصل اثباتهای نمادی هستند؛ اما با توسل به اثباتهای تصویری به نظر نمی‌رسد که ریاضیات رشد یابد. این ایراد نیز مانند ایراد قبلی خللی به مقبولیّت اثباتهای تصویری وارد نمی‌سازد؛ زیرا مقبولیت یک الگوی استنتاجی در ایفای نقش توجیهی (اعم از توجیه معرفتی یا نحوشناختی) یک مدعا است و توانایی آن الگو در ایفای نقشهای

دیگر، ازجمله توسیع فرایندها و تولید فراوردههای ریاضیاتی، مدعایی دیگر.

اما افزون بر آن، سادهانگاری بزرگی نیز در این ایراد مشاهده میشود. تصاویر و اثباتهای تصویری درحدخود نقش انکارناپذیری در رشد و توسعهٔ ریاضیات دارند. در مقدمهٔ همین مقاله به مهمترین کارهایی که به تبیین این نقش پرداختهاند اشاره کردیم. مثلاً براون ابتدا بهطورکلی دو نوع شواهد و قرائن در ریاضیات را از هم متمایز میکند: قیاسی و استقرایی. شواهد استقرایی عبارتاند از هرآنچه به وثاقت یک برهان سنتی نرسد؛ مثل استقرای شمارشی، تمثیل، و تجربهٔ وسیع. او سپس استدلال میکند که حتی اگر قائل شویم فقط شواهد قیاسی، یعنی اثباتهای نمادی، میتوانند نقش توجیهی ایفا کنند، باز هم شواهد استقرایی برای توجیه مدعیات ریاضیاتی و بهطورکلی توسعهٔ ریاضیات لازماند؛ زیرا اثباتهای کلاسیک در نهایت، بر اصول موضوعه استوارند و اصول موضوعه نیز بر شواهد استقرایی. یکی از همین نوع شواهد استقرایی، تصاویر و نمودارها هستند (Brown, 2008, 31). بنابراین تصاویر و اثباتهای تصویری ناب و آمیخته، عملاً نقشهایی ضروری و جانشینناپذیر در برنامههای پژوهشی در ریاضیات ایفا میکنند.

نتیجهگیری

از مجموع بررسیهای صورت گرفته در اینجا، میتوان دربارهٔ مقبولیّت اثباتهای تصویری به چهار نتیجهٔ مهم اشاره کرد. نخست اینکه «مقبولیّت» یک اثبات یا یک نوع اثبات گاهی معنای روششناختی دارد، که در این صورت مهمترین معیارهای مقبولیّت عبارتاند از وارسیپذیری و اعتمادپذیری؛ گاهی نیز معنای جامعهشناختی دارد که در این صورت چیزی جز مشروعیّت نیست.

نکتهٔ دوم اینکه به نظر میرسد، به هیچکدام از این دو معنا، نمیتوان دربارهٔ نوع اثباتهای تصویری به نحو پیشینی و کلی حکم به قبول یا رد داد؛ بلکه باید به طور موردی یا مصداقی داوری کرد. اثباتهای تصویری گاهی مقبول و گاهی نامقبولاند.

سوم اینکه وقتی دربارهٔ مقبولیّت یک اثبات تصویری صحبت میکنیم، دربارهٔ نقشهای مهمتر ومؤثرتر تصاویر و نمودارها، ازجمله نقش شناختیِ اقناع و نقش معرفت-

شناختی توجیه، صحبت می‌کنیم، نه صرفاً نقشهای روان‌شناختی، مثل ملموس کردن و آسان‌یاب کردن مدعیات و دلایل ریاضیاتی.

نکتهٔ نهایی اینکه نپذیرفتن این نوع از اثباتها بیشتر معلول عوامل روان‌شناختی و جامعه‌شناختی، به‌خصوص غلبهٔ تلقی صورت‌گرایانه در جامعهٔ ریاضی و القای آموزه‌های صورت‌گرایانه در نظام‌های آموزش ریاضی است تا دلایل منطقی یا روش‌شناختی. ما نه-تنها دلایل قوی بر رد کلی و اساسی این نوع اثبات، به‌عنوان یک الگوی استنتاجی در ریاضیات، نداریم، بلکه دلایل خوبی برای به رسمیت شناختن آن داریم. آنچه در اینجا حائز اهمیّت است، آگاهی از نقشی است که این نوع از اثباتها در کل ریاضیات دارد یا باید داشته باشد، نه کمتر و نه بیشتر.

سپاس و تقدیم

طرح و صورت‌بندی بخش مهمی از مطالب این مقاله را مدیون گفتگویی هستم که در جریان سخنرانی‌ام، با عنوان «مرگ اثبات»، در دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه زنجان، با اساتید گروه فلسفه و ریاضی آن دانشگاه صورت گرفت؛ به‌خصوص بندهای ۸ تا ۱۰ مقاله با نقدهای اساتید شکل گرفت و سایر بندها نیز در واکنش به مداقه‌ها و نقدهای ایشان شکل کامل‌تری یافت. از راهنمایی‌ها و گفتگوهای شوق‌انگیزشان سپاسگزارم و این نوشتار ناچیز را به گروه ریاضی دانشگاه زنجان تقدیم می‌کنم.

منابع

Bayat, H. (2015), "Lakatos and Hersh on mathematical proof" in Philosophical Investigations, , University of Tabriz, 2015, Vol. 9, No. 17, pp. 75 – 93.

Barwise, J. and Etchemendy, J. (1991), "Visual Information and Valid Reasoning", in W. Zimmerman and S. Cunningham (eds.), in Visualization in Teaching and Learning Mathematics, Mathematical Association of America, pp. 3-25.

Brown, J. R. (1997), "Proofs and Pictures", British Journals for Philosophy of Scien***ce***, 48:161-180.

Brown, J. R. (2008), *Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledege.

Bosanquet R. G. and others, (1976), *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of mathematics: Cambridge 1939*, Cora Diamond (ed.), The Harvester Press.

Burton, D. M. (2006), *The History of Mathematics: An Introduction*, McGraw-Hill.

Coleman, E. (2008), "The Survey ability of Long Proof" in *Foundations of Science*, Springer, Vol. 14, pp. 27-43

Fallis, D. (2003), "Intentional Gaps in Mathematical Proofs", *Synthese*, 134:45-69

Giaquinto, M. (1994), "Epistemology of visual thinking in elementary real analysis", *British Journal for Philosophy of Science* 45: 789-813.

Hammer, E. (1995), *Logic and Visual Information*, Studies in Logic, Language and Information, Stanford: CSLI and Cambridge

University Press.

Hersh, R. (1997), *What Is Mathematics, Really?* Oxford University Press, New York,.

Hanna, G. (1989), "Mor than Formal Proof," *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, No 1, 20-25.

Hilbert, D. (1894), *Grundlagen der Geometrie, Unpublished lectures,* Niedersachsische Staat-und Universitatsbibliothek, Cod. Ms. Hilbert, 594.

Hilbert, D. (1902), *Grundlagen der Geometrie, Unpublished lectures*, Mathematisches Institut, Gottingen.

Lakatos, Imre, (1976), *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*, Eds: John Worrall, Elie Zahar, Cambridge University Press.

Lakatos, Imre, (1978), "Mathematics, science and epistemology" in *Philosophical Papers* vol 2, Eds: John Worrall, Gregory Currie, Cambridge University Press, pp. 61-69.

Marion, M. (1998), *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

Nelson, R. B. (1993), *Proofs without Words*, the Mathematical Association of America.

Nelson, R. B. (2000), *Proofs without Words II*, the Mathematical Association of America.

Resnik M. D. (2005), "Proof as a Source of Truth", *In Proof and Knowledg in Mathematics*, Detlefsen M. (ed.), pp. 1-17.