پژوهش‌های مدیریت منابع سازمانی
دوره 2، شماره 3، پاییز 1391

اندازه‌گیری عملکرد کلی واحدهای تصمیم‌گیری: کاربرد در توزیع بار در میان کشورهای عضو ناتو

حسین عزیزی*

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد پارس‌آباد مغان، پارس‌آباد مغان، ایران

دریافت: 91/12/14 پذیرش: 92/3/12

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها در ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری دارای چندین خروجی و چندین ورودی، بسیار سودمند بوده است. مدل‌های متعارف تحلیل پوششی داده‌ها برای اندازه‌گیری عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری فقط دیدگاه خوشبینانه را در نظر می‌گیرند؛ به عبارتی برای هر واحد تصمیم‌گیری تحت ارزیابی، یک مجموعه از مطلوب‌ترین وزن‌ها را انتخاب می‌کنند. مدل‌های دیگری وجود دارد که کارایی یک واحد تصمیم‌گیری را از دیدگاه بدبینانه اندازه‌گیری می‌کنند. این مدل‌ها عملکرد هر واحد تصمیم‌گیری تحت ارزیابی را با استفاده از یک مجموعه از نامطلوب‌ترین وزن‌ها اندازه‌گیری می‌کنند.

در این مقاله برای اندازه‌گیری عملکرد کلی واحدهای تصمیم‌گیری پیشنهاد می‌شود که هر دو کارایی را در قالب یک بازه ادغام کنیم و مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های پیشنهادی برای اندازه‌گیری کارایی را مدل‌های کراندار می‌نامیم. رویکرد پیشنهادی با استفاده از یک مثال عددی مقایسه خواهد شد. یک مثال دیگر نیز در مورد سنجش توزیع بار در میان کشورهای عضو ناتو (سازمان پیمان آتلانتیک شمالی) ارائه خواهد شد تا مزایا، سادگی و سودمندی آن را در موقعیت‌های زندگی واقعی نشان دهد.

---

*نویسنده مسؤول مقاله: Email: azizhossein@gmail.com

واژگان کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی بازه‌ای، کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه، مدل‌های کراندار.

1- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها[1]، یک روش ارزیابی متمرکز بر داده‌ها است و برای ارزیابی عملکرد و کارایی نسبی گروهی از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها)[2] با ورودی‌ها و خروجی‌های متعدد مورد استفاده قرار می‌گیرد. لذا از تحلیل پوششی داده‌ها به صورت وسیعی برای بررسی کارایی واحدهای دولتی و خصوصی استفاده شده است. تحلیل پوششی داده‌های ابداع شده توسط چارنز[3] و همکاران [1، صص 429-444]، عملکرد واحد تصمیم‌گیری را از دیدگاه خوشبینانه اندازه‌گیری می‌کند. کارایی اندازه‌گیری شده در این روش، *بهترین کارایی نسبی* یا *کارایی خوشبینانه* نامیده می‌شود و اندازه آن در ماهیت خروجی، محدود به مقادیر بزرگ‌تر یا مساوی یک است. اگر بهترین کارایی نسبی یک واحد تصمیم‌گیری برابر با یک باشد، گفته می‌شود که کارای خوشبینانه است؛ در غیر این صورت، غیرکارای خوشبینانه گفته می‌شود. معمولاً تصور بر این است که واحدهای تصمیم‌گیری کارای خوشبینانه عملکرد بهتری نسبت به واحدهای تصمیم‌گیری غیرکارای خوشبینانه دارند.

به غیر از مدل‌های متعارف در تحلیل پوششی داده‌ها، مدل‌های دیگری موجودند که کارایی هر واحد تصمیم‌گیری را از دیدگاه بدبینانه اندازه‌گیری می‌کنند [2]. کارایی‌های سنجیده شده از دیدگاه بدبینانه را *بدترین کارایی نسبی* یا *کارایی بدبینانه* می‌نامند و اندازه آن در ماهیت خروجی، محدود به مقادیر کوچک‌تر یا مساوی یک است. در صورتی که مقدار کارایی بدبینانه یک واحد تصمیم‌گیری برابر یک باشد، گفته می‌شود که ناکارای بدبینانه است؛ در غیر این صورت گفته می‌شود که غیرناکارای بدبینانه است. معمولاً تصور بر این است که واحدهای تصمیم‌گیری ناکارای بدبینانه عملکرد بدتری نسبت به واحدهای تصمیم‌گیری غیرناکارای بدبینانه دارند.

برای اینکه یک ارزیابی کلی از عملکرد هر واحد تصمیم‌گیری داشته باشیم باید هر دو

1. Data Envelopment Analysis (DEA)
2. Decision-Making Units (DMUs)
3. Charnes

کارایی خوشبینانه و بدبینانه را همزمان در نظر بگیریم. انتانی[1] و همکاران [3، صص 32-45] اولین کسانی بودند که عملکرد واحد تصمیم‌گیری را از هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه مورد بررسی قرار دادند. ایده آنها این است که کارایی متعارف در مطلوب‌ترین شرایط (یعنی خوشبینانه) اندازه‌گیری می‌شود. از این رو باید یک کارایی دیگر نیز در نامطلوب‌ترین شرایط (یعنی بدبینانه) ارزیابی شود و کارایی یک واحد تصمیم‌گیری، بازه بین مقادیر بدبینانه و خوشبینانه است. به همین منظور آنها مدل‌هایی را برای اندازه‌گیری بازه کارایی هر واحد تصمیم‌گیری پیشنهاد کردند. اما مدل کران پایین آنها فقط می‌تواند کارایی خوشبینانه هر واحد تصمیم‌گیری را تحت یک قید شرطی منفرد اندازه‌گیری کند. بر این اساس، مدل کران پایین آنها عیب مهمی دارد؛ یعنی برای محاسبه کارایی خوشبینانه هر واحد تصمیم‌گیری، صرف نظر از اینکه چند ورودی- خروجی داشته باشند، فقط از یک ورودی و یک خروجی استفاده می‌شود. به‌علاوه مدل کران پایین آنها قادر به شناسایی تمام واحدهای تصمیم‌گیری کارای خوشبینانه نیست. اخیراً عزیزی و فتحی اجیرلو [4، صص411-418]، وانگ[2] و یانگ[3] [5، صص 253-267] نارسایی‌های مدل‌های انتانی و همکاران [3، صص 32-45] را در ماهیت ورودی بهبود بخشیده‌اند. هم‌چنین وانگ و همکاران [6، صص 328-343] و عزیزی و جاهد [7، صص 49-63] یک زوج مدل بازه‌ای جهت کار با داده‌های دقیق مطرح کردند.

در این مقاله کانون توجه ما به مقاله انتانی و همکاران [3، صص 32-45] است. نشان می‌دهیم که رویکرد پیشنهادی انتانی و همکاران [3، صص 32-45] برای محاسبه بازه کارایی هر واحد تصمیم‌گیری دارای مشکلات زیادی است. بنابراین مدل‌های پیشنهادی آنها را بازبینی می‌کنیم، به طوری که بتوان یک تحلیل با استفاده از مفهوم کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه انجام داد. به این ترتیب مدل‌های جدیدی ایجاد می‌کنیم به طوری که بینش غنی‌تری را درباره بازه کارایی هر واحد تصمیم‌گیری ایجاد می‌کنند. نشان خواهیم داد در مقایسه با مدل‌های انتانی و همکاران [3، صص 32-45]، مدل‌های پیشنهادی ما در این مقاله بازه کارایی واحدهای تصمیم‌گیری را به‌طور صحیح محاسبه می‌کنند. مهم‌تر اینکه کارایی خوشبینانه هر واحد تصمیم‌گیری نسبت به همه واحدهای تصمیم‌گیری دیگر اندازه‌گیری می‌شود و با استفاده از

1. Entani
2. Wang
3. Yang

تمام اطلاعات ورودی- خروجی محاسبه می‌شود، نه فقط یک ورودی و یک خروجی. مدل‌های پیشنهادی از طریق یک مثال در مورد سنجش توزیع بار در میان کشورهای عضو ناتو (سازمان پیمان آتلانتیک شمالی) نشان داده خواهد شد. مدل‌های پیشنهادی اطلاعات بیش‌تری را درباره رتبه‌بندی کشورهای کارای خوشبینانه ارائه می‌کند و تا حدودی نشان می‌دهد که کدام‌یک از این کشورها، سهم خیلی زیادی از مسئولیت‌های ناتو را جذب می‌کنند. این، به نوبه‌ی خود موجب قدرت افتراقی بیشتر، اندازه‌گیری دقیق‌تر کارایی، رتبه‌بندی معنادارتر کشورهای کارای خوشبینانه در زمینه توزیع بار و ارزیابی قابل اعتمادتر سهم کشورهای عضو ناتو در میان مسائل دیگر مربوط به سیاست‌گزاری می‌شود.

ادامه این مقاله به صورت زیر سازمان‌دهی شده است: بخش 2، مدل‌های اساسی تحلیل پوششی داده‌ها را برای اندازه‌گیری کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه واحدهای تصمیم‌گیری معرفی می‌کند. بخش 3 نخست مدل‌های انتانی و همکاران [3، صص 32-45] را تحلیل می‌کند، سپس مدل‌های جدیدی را ارائه می‌کند. بخش 4 با مثال عددی مدل‌های پیشنهادی در این مقاله را با مدل‌های انتانی و همکاران [3، صص 32-45] مقایسه می‌کند. یک مثال تجربی مسئله ارزیابی توزیع بار ناتو در قسمت 5 ارائه خواهد شد. نتیجه‌گیری مقاله در بخش 6 ارائه می‌شود.

2- مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها برای اندازه‌گیری کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه

2-1- مدل تحلیل پوششی داده‌ها برای اندازه‌گیری کارایی‌های خوشبینانه واحدهای تصمیم‌گیری

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری برای انتخاب وجود دارند که باید از نظر m ورودی و s خروجی ارزیابی شوند. برای DMU_j $(j=1,\ldots,n)$، مقادیر ورودی را با نماد x_{ij} $(i=1,\ldots,m)$ و مقادیر خروجی را با نماد y_{rj} $(r=1,\ldots,s)$ نشان می‌دهیم که همه آنها معلوم و نامنفی هستند. به‌منظور تعیین کارایی DMU_j، چارنز و همکاران [1، صص 429-444]

مدل CCR شناخته شده زیر را ارائه داده‌اند که کارایی خوشبینانه هر واحد تصمیم‌گیری را در ماهیت خروجی اندازه‌گیری می‌کند:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \quad j = 1,\ldots,n, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1, \\ & u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r = 1,\ldots,s; \quad i = 1,\ldots,m. \end{aligned} \tag{1}$$

که در اینجا DMU_o به واحد تصمیم‌گیری تحت ارزیابی اشاره دارد، و u_r $(r=1,\ldots,s)$ و v_i $(i=1,\ldots,m)$ متغیرهای تصمیم‌گیری و ε بسیار کوچک غیر ارشمیدسی است. اگر مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت u_r^* $(r=1,\ldots,s)$ و v_i^* $(i=1,\ldots,m)$ وجود داشته باشد که باعث شود $\theta_o^* = 1$، آن‌گاه DMU_o کارای خوشبینانه نامیده می‌شود؛ در غیر این صورت به آن غیرکارای خوشبینانه می‌گویند. همه واحدهای تصمیم‌گیری کارای خوشبینانه با هم دیگر یک مرز کارایی را تشکیل می‌دهند.

2-2- مدل تحلیل پوششی داده‌ها برای اندازه‌گیری کارایی‌های بدبینانه واحدهای تصمیم‌گیری

کارایی بدبینانه DMU_o نسبت به DMUهای دیگر با مدل کارایی بدبینانه زیر اندازه‌گیری می‌شود [4، صص 411؛ 9، صص 929-937]:

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi_o = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \ge 0, \quad j = 1,\ldots,n, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1, \\ & u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r = 1,\ldots,s; \quad i = 1,\ldots,m. \end{aligned} \tag{2}$$

پرتال جامع علوم انسانی

زمانی که مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت u_r^* $(r=1,\ldots,s)$ و v_i^* $(i=1,\ldots,m)$ وجود داشته باشد تا $\varphi_o^*=1$ را تأمین کند، می‌گوییم که DMU_o ناکارای بدبینانه است. در غیر این صورت می‌گوییم که DMU_o غیرناکارای بدبینانه است. همه واحدهای تصمیم‌گیری ناکارای بدبینانه با هم دیگر یک مرز ناکارایی را تشکیل می‌دهند.

3- مدل‌های کراندار برای اندازه‌گیری کارایی‌های بازه‌ای واحدهای تصمیم‌گیری

3-1- تحلیل مدل‌های انتانی و همکاران [3، صص 32-45]

انتانی و همکاران [3، صص 32-45] برای ایجاد یک بازه کارایی برای هر واحد تصمیم‌گیری، مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی کران‌های بالا و پایین زیر را برای DMU_o پیشنهاد کردند:

$$\begin{aligned}&\max/\min \quad \phi_o=\frac{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{io}/\sum_{r=1}^{s}u_r y_{ro}}{\max_j\{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}/\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}\}}\\&\text{s.t.}\quad u_r,v_i\geq 0,\quad r=1,\ldots,s;\quad i=1,\ldots,m,\end{aligned}\tag{3}$$

مدل کران بالا را می‌توان به مدل زیر تبدیل کرد و می‌توان آن را از راه مدل (2) حل کرد:

$$\begin{aligned}&\max \quad \phi_o^U=\sum_{i=1}^{m}v_i x_{io}/\sum_{r=1}^{s}u_r y_{ro}\\&\text{s.t.}\quad \max_j\left\{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}/\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}\right\}=1,\\&\quad u_r,v_i\geq 0,\quad r=1,\ldots,s;\quad i=1,\ldots,m,\end{aligned}\tag{4}$$

هم‌چنین مدل کران پایین را می‌توان به مدل زیر تبدیل کرد:

$$\min \quad \phi_o^L = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} / \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}$$

$$\text{s.t.} \quad \max_j \left\{ \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \right\} = 1, \qquad (5)$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m,$$

مدل (5) قابل تبدیل به یک مدل برنامه‌ریزی خطی معادل نیست. با فرض $\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} = 1$ برای هر واحد ناکارای بدبینانه، انتانی و همکاران [3، صص 32-45] مدل (5) را به d مسئله زیر بهینه‌سازی ($j = J_1, \ldots, J_d$) تقسیم کردند که در آن d تعداد واحدهای ناکارای بدبینانه است، و $J_1, \ldots, J_d$ واحدهایی هستند که ناکارای بدبینانه هستند:

$$\begin{aligned}
&\min \quad \phi_{oJ_1}^L = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} / \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\
&\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{iJ_1} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rJ_1} = 1, \\
&\quad u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m, \\
&\vdots \\
&\min \quad \phi_{oJ_p}^L = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} / \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\
&\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{iJ_d} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rJ_d} = 1, \\
&\quad u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m,
\end{aligned} \qquad (6)$$

مسئله زیر بهینه‌سازی (6) را می‌توان با تبدیل کردن به مسئله زیر بهینه‌سازی به شرح زیر ساده‌تر کرد:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \phi^{L}_{oJ_1} = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \\
&\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{iJ_1} - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rJ_1} = 0, \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1, \\
&\qquad u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1,\ldots,s; \quad i = 1,\ldots,m, \\
&\vdots \\
&\min \quad \phi^{L}_{oJ_p} = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \\
&\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{iJ_d} - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rJ_d} = 0, \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1, \\
&\qquad u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1,\ldots,s; \quad i = 1,\ldots,m,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

می‌توانیم این مسئله زیر بهینه‌سازی را حل کنیم و مقدار مینیمم را روی مقادیر بهینه (7) به عنوان کران پایین بازه کارایی به دست آوریم. وقتی که j برابر با o است، واضح است که $\phi^{L^*}_{oj} = 1$. از این رو می‌توان کران پایین بازه کارایی را به صورت زیر نوشت:

$$
\phi^{L^*}_{o} = \min_{j=J_1,\ldots,J_d} \{\phi^{L^*}_{oj}\} \tag{8}
$$

بر این اساس، انتانی و همکاران [3، صص 32-45] بازه کارایی DMU_o را با نماد $[\phi^{L^*}_{o}, \phi^{U^*}_{o}]$ نشان می‌دهند.

در مسئله زیر بهینه‌سازی (7)، هر مدل برنامه‌ریزی خطی فقط دو شرط خطی دارد. بنابراین صرف نظر از اینکه تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها در مسئله مورد نظر چند تا باشد، فقط دو متغیر تصمیم که یکی از آنها برای وزن ورودی و دیگری برای وزن خروجی است، می‌توانند ناصفر باشند. به این خاطر است که گفته می‌شود مدل کران پایین انتانی و همکاران [3، صص 32-45]، کارایی خوشبینانه هر واحد تصمیم‌گیری را تنها با لحاظ کردن یک ورودی و یک خروجی اندازه‌گیری می‌کند. این به‌طور مسلم یکی از معایب رویکرد آنها است.

3-2- مدل‌های کراندار برای داده‌های قطعی

از نظر تئوری، کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه باید یک بازه را تشکیل دهند [3، صص 32-45]. برای این منظور، کارایی‌های خوشبینانه واحدهای تصمیم‌گیری را باید تعدیل کرد. فرض کنید α $(0<\alpha\le 1)$ ضریب تعدیل باشد. در این صورت کارایی‌های خوشبینانه تعدیل شده را می‌توان به صورت $\tilde{\theta}_j^*=\alpha\theta_j^*$ $(j=1,\ldots,n)$ نوشت که باید شرط $\tilde{\theta}_j^*=\alpha\theta_j^*\le\varphi_j^*$ $(j=1,\ldots,n)$ را تأمین کنند؛ یعنی $\alpha\le\min_{j=1,\ldots,n}\{\varphi_j^*/\theta_j^*\}$.

بر این اساس بازه کارایی مربوط به DMU_j $(j=1,\ldots,n)$ را می‌توان به صورت $[\alpha\theta_j^*,\varphi_j^*]$ $(j=1,\ldots,n)$ بیان کرد.

به منظور سنجش منطقی بازه کارایی هر واحد تصمیم‌گیری، نخست واحد تصمیم‌گیری آنتی‌ایدئال (ADMU) و واحد تصمیم‌گیری ایدئال (IDMU) را تعریف می‌کنیم.

تعریف 1: ADMU یک واحد تصمیم‌گیری مجازی است که با مصرف بیش‌ترین مقدار ورودی، کم‌ترین مقدار خروجی را تولید می‌کند.

تعریف 2: IDMU یک واحد تصمیم‌گیری مجازی است که با مصرف کم‌ترین مقدار ورودی، بیش‌ترین مقدار خروجی را تولید می‌کند.

با توجه به تعاریف 1 و 2، مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌های IDMU را به ترتیب با نمادهای $x_i^{\min}$ $(i=1,\ldots,m)$ و $y_r^{\max}$ $(r=1,\ldots,s)$ و مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌های ADMU را به ترتیب با نمادهای $x_i^{\max}$ $(i=1,\ldots,m)$ و $y_r^{\min}$ $(r=1,\ldots,s)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین $x_i^{\min}$ و $x_i^{\max}$ به‌ترتیب نشان دهنده کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار ورودی iام و $y_r^{\min}$ و $y_r^{\max}$ به‌ترتیب نشان دهنده کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار خروجی rام می‌باشند. این مقادیر به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} &x_i^{\min}=\min_j\{x_{ij}\} \quad\text{and}\quad x_i^{\max}=\max_j\{x_{ij}\},\quad i=1,\ldots,m,\\ &y_r^{\min}=\min_j\{y_{rj}\} \quad\text{and}\quad y_r^{\max}=\max_j\{y_{rj}\},\quad r=1,\ldots,s. \end{aligned} \tag{9}$$

فرض کنید θ_{ADMU}^* کارایی خوشبینانه ADMU باشد؛ در این صورت می‌توان آن را از

مدل برنامه‌ریزی خطی زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \theta_{ADMU} = \sum_{i=1}^{m} v_i x_i^{\max} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \quad j = 1,\ldots,n, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_r^{\min} = 1, \\
& u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r = 1,\ldots,s; \quad i = 1,\ldots,m.
\end{aligned} \tag{10}$$

با فرض اینکه φ_{IDMU}^* کارایی بدبینانه IDMU باشد، می‌توان آن را از مدل برنامه‌ریزی خطی زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \varphi_{IDMU} = \sum_{i=1}^{m} v_i x_i^{\min} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \ge 0, \quad j = 1,\ldots,n, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_r^{\max} = 1, \\
& u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r = 1,\ldots,s; \quad i = 1,\ldots,m.
\end{aligned} \tag{11}$$

با توجه به مطالب بالا داریم:

$$\varphi_{IDMU}^* \le \min_{j=1,\ldots,n} \{\varphi_j^*\} \text{ و } \theta_{ADMU}^* \ge \max_{j=1,\ldots,n} \{\theta_j^*\} \tag{12}$$

اکنون پارامتر α را طوری تعیین می‌کنیم که برای تمام بازه‌ها $[\alpha\theta_j^*, \varphi_j^*]$ $(j = 1,\ldots,n)$، شرط $\alpha\theta_j^* \le \varphi_j^*$ $(j = 1,\ldots,n)$ برقرار باشد:

$$\min_{j=1,\ldots,n} \{\varphi_j^* / \theta_j^*\} \ge \frac{\min\limits_{j=1,\ldots,n} \{\varphi_j^*\}}{\max\limits_{j=1,\ldots,n} \{\theta_j^*\}} \ge \frac{\varphi_{IDMU}^*}{\theta_{ADMU}^*}, \tag{13}$$

اگر قرار دهیم $\alpha = \varphi_{IDMU}^* / \theta_{ADMU}^*$، در این صورت مشکلی در تعیین α نخواهیم داشت.

بنابراین کارایی‌های واحدهای تصمیم‌گیری را می‌توان در محدوده بازه $[\alpha,1]$ به دست آورد [4].

دو مدل برنامه‌ریزی کسری زیر منعکس‌کننده این ایده است:

$$\begin{aligned}
&\max/\min \quad \psi = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}} \\
&\text{s.t.} \quad \alpha \le \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}} \le 1, \quad j=1,\ldots,n, \\
&\qquad u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r=1,\ldots,s; \quad i=1,\ldots,m,
\end{aligned} \tag{14}$$

به کمک تبدیل چارنز و کوپر[1] [8، صص 185-181] مدل‌های برنامه‌ریزی کسری (14) به مدل‌های برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شوند و به راحتی قابل حل خواهند بود:

$$\begin{aligned}
&\max/\min \quad \psi = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \\
&\text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^{s} u_r (\alpha y_{rj}) - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \quad j=1,\ldots,n, \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \ge 0, \quad j=1,\ldots,n, \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1, \\
&\qquad u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r=1,\ldots,s; \quad i=1,\ldots,m.
\end{aligned} \tag{15}$$

هر کدام از مدل‌های (14) و (15) را مدل‌های کراندار می‌نامیم. فرض کنید که ψ_o^{U*} و ψ_o^{L*} به‌ترتیب مقادیر ماکزیمم و مینیمم مدل‌های (15) باشند. در این صورت آنها کران‌های بالا و پایین بازه کارایی را تشکیل می‌دهند که با نماد $[\psi_o^{L*}, \psi_o^{U*}]$ نشان می‌دهیم و محدوده کارایی DMU_o است.

در رابطه با بازه کارایی $[\psi_o^{L*}, \psi_o^{U*}]$، تعاریف زیر را داریم:

تعریف 3: DMU_o را ناکارای بدبینانه می‌گوییم اگر و تنها اگر $\psi_o^{U*} = 1$، در غیر این صورت آن را غیرناکارای بدبینانه می‌گوییم.

1. Cooper

تعریف 4: DMU_o را کارای خوشبینانه می‌گوییم اگر و تنها اگر $\psi_o^{L^*} = \alpha$، در غیر این صورت آن را غیرکارای خوشبینانه می‌گوییم.

تعریف 5: DMU_o را نامعینِ می‌گوییم اگر و تنها اگر نه کارای خوشبینانه و نه ناکارای بدبینانه باشد.

تعریف 6: DMU_o را ویژه می‌گوییم اگر و تنها اگر هم کارای خوشبینانه و هم ناکارای بدبینانه باشد.

در مورد آن دسته از واحدهای نامعین می‌توان گفت که همیشه بین دو مرز کارا و ناکارا احاطه شده‌اند [4، صص 411-418؛ 5، صص 253-267؛ 6، صص 328-343؛ 7، صص 49-63؛ 10، صص 2384-2393].

4- یک مثال عددی

مثال 1: مسئله اندازه‌گیری عملکرد ده واحد تصمیم‌گیری را در نظر بگیرید که هر واحد تصمیم‌گیری یک ورودی و دو خروجی دارد. مجموعه داده‌ها از مقاله انتانی و همکاران [3، صص 32-45] گرفته شده است و در جدول 1 نشان داده شده است.

جدول 1 داده‌ها برای ده واحد تصمیم‌گیری با یک ورودی و دو خروجی

DMU	ورودی	خروجی 1	خروجی 2
A	1	1	8
B	1	2	3
C	1	2	6
D	1	3	3
E	1	3	7
F	1	4	2
G	1	4	5
H	1	5	2
I	1	6	2
J	1	7	1
ADMU	1	1	1
IDMU	1	7	8

با توجه به جدول 2، سه تا از واحد تصمیم‌گیری، یعنی DMU_A، DMU_E و DMU_J برحسب مدل (1)، کارای خوشبینانه هستند. این سه واحد کارای خوشبینانه روی هم یک مرز کارایی AEJ را تعیین می‌کنند که در شکل 1 نشان داده شده است. عملکرد ده واحد تصمیم‌گیری برحسب کارایی خوشبینانه آنها به صورت زیر رتبه‌بندی می‌شود:

$$DMU_A \sim DMU_E \sim DMU_J \succ DMU_G \sim DMU_I$$
$$\succ DMU_H \succ DMU_C \succ DMU_F \succ DMU_D \succ DMU_B$$

که در اینجا نماد «$\sim$» نشان دهنده »بی‌تفاوت بودن» و نماد «$\succ$» نشان دهنده »برتر بودن» است.

جدول 1 کارایی‌های نسبی و بازه‌های کارایی برای ده واحد تصمیم‌گیری

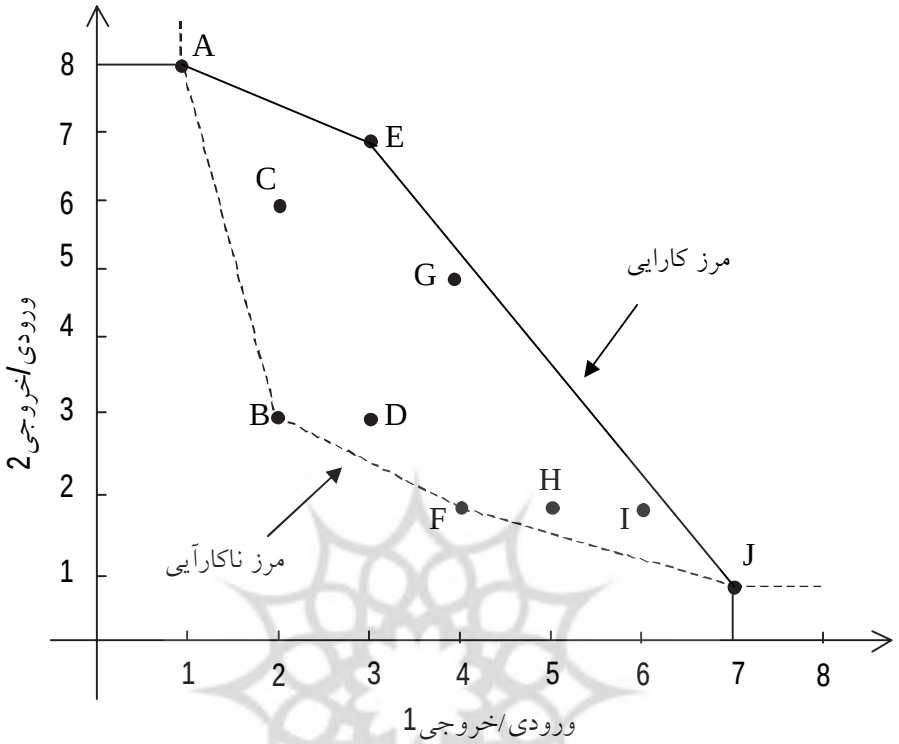
DMU	کارایی بدبینانه	کارایی خوشبینانه	بازه کارایی	
			مدل‌های انتانی و همکاران	مدل‌های کراندار (15)
A	1/0000	1/0000	[0.1250, 1.0000]	[0.0756, 1.0000]
B	1/0000	1/9167	[0.3333, 1.0000]	[0.1449, 1.0000]
C	0/8125	1/2143	[0.1667, 0.8125]	[0.0918, 0.8125]
D	0/8889	1/5333	[0.3333, 0.8889]	[0.1159, 0.8889]
E	0/5909	1/0000	[0.1429, 0.5909]	[0.0756, 0.5909]
F	1/0000	1/4375	[0.2500, 1.0000]	[0.1087, 1.0000]
G	0/5714	1/0455	[0.2000, 0.5714]	[0.0790, 0.5714]
H	0/9091	1/2105	[0.2000, 0.9091]	[0.0915, 0.9091]
I	0/8333	1/0455	[0.1667, 0.8333]	[0.0790, 0.8333]
J	1/0000	1/0000	[0.1429, 1.0000]	[0.0756, 1.0000]

از دیدگاه بدبینانه، چهار واحد تصمیم‌گیری، یعنی DMU_A، DMU_B، DMU_F و DMU_J ناکارای بدبینانه هستند. آنها روی هم یک مرز ناکارایی ABFJ را تعریف می‌کنند که آن هم در شکل 1 نشان داده شده است. عملکرد ده واحد تصمیم‌گیری برحسب کارایی بدبینانه آنها به صورت زیر رتبه‌بندی می‌شود:

$$DMU_G \succ DMU_E \succ DMU_C \succ DMU_I \succ DMU_D \succ DMU_H \sim DMU_A \sim DMU_B \sim DMU_F \sim DMU_J$$

سنجش‌های بالا بر اساس دیدگاه‌های متفاوتی صورت گرفته‌اند، از این رو ممکن است نتایج متفاوتی نیز داشته باشند؛ به عنوان مثال DMU_A و DMU_J وقتی که از دیدگاه خوشبینانه ارزیابی می‌شوند، کارای خوشبینانه تلقی شده‌اند؛ یعنی از همه واحدهای تصمیم‌گیری دیگر عملکرد بهتری دارند. در حالی که وقتی از دیدگاه بدبینانه ارزیابی می‌شوند، ناکارای بدبینانه هستند؛ یعنی عملکرد آنها از همه واحدهای تصمیم‌گیری دیگر بدتر است. این دو نتیجه ارزیابی به طور مسلم با یکدیگر تعارض دارند. هر نتیجه‌گیری ارزیابی که فقط یکی از این دو دیدگاه را در نظر بگیرد، بدون تردید یک‌طرفه و غیر واقع‌گرایانه خواهد بود.

به منظور ارائه یک ارزیابی کلی از هر واحد تصمیم‌گیری، انتانی و همکاران [3، صص 32-45] هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه را همزمان در نظر گرفتند. بازه کارایی به دست آمده از مدل‌های انتانی و همکاران [3، صص 32-45] در جدول 2 گزارش شده است. واضح است که مدل کران پایین آنها فقط DMU_A را واحد تصمیم‌گیری کارای خوشبینانه شناسایی می‌کند که کم‌ترین کارایی کران پایین را در بین ده واحد تصمیم‌گیری دارد، اما دو واحد تصمیم‌گیری کارای خوشبینانه دیگر را نمی‌تواند تشخیص دهد. بنابراین مرز تولید کارایی را نمی‌توان با رویکرد آنها شناسایی کرد.



شکل 1 مرزهای کارایی و ناکارایی برای ده واحد تصمیم‌گیری

با توجه به اینکه چهار تا از واحدهای تصمیم‌گیری، یعنی DMU_A، DMU_B، DMU_F و DMU_J به صورت ناکارای بدبینانه مشخص شده‌اند. انتانی و همکاران [3، صص 32-45] به منظور تعیین کران پایین بازه کارایی هر واحد تصمیم‌گیری از چهار مدل برنامه‌ریزی خطی برای هر واحد تصمیم‌گیری استفاده کردند (در کل برای تعیین کران پایین بازه کارایی ده واحد تصمیم‌گیری، *چهل* مدل برنامه‌ریزی خطی باید حل شود)؛ برای مثال DMU_A را در نظر بگیرید. برای تعیین کران پایین بازه کارایی این واحد تصمیم‌گیری، چهار مدل برنامه‌ریزی خطی زیر باید حل شوند:

$$(\text{LP1}):\ \phi_{AA}^{L^*} = \min\ v_1$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} u_1 + 8u_2 = 1 \\ v_1 - (u_1 + 8u_2) = 0 \\ u_1, u_2, v_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(\text{LP2}):\ \phi_{AB}^{L^*} = \min\ v_1$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} u_1 + 8u_2 = 1 \\ v_1 - (2u_1 + 3u_2) = 0 \\ u_1, u_2, v_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(\text{LP3}):\ \phi_{AF}^{L^*} = \min\ v_1$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} u_1 + 8u_2 = 1 \\ v_1 - (4u_1 + 2u_2) = 0 \\ u_1, u_2, v_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(\text{LP4}):\ \phi_{AJ}^{L^*} = \min\ v_1$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} u_1 + 8u_2 = 1 \\ v_1 - (7u_1 + u_2) = 0 \\ u_1, u_2, v_1 \geq 0 \end{cases}$$

مجموعه جواب چهار مدل برنامه‌ریزی خطی بالا به شرح زیر است:

$\phi_{AA}^{L^*} = 1,\ \ u_1^* = 0,\ \ u_2^* = 1/8$ و $v_1^* = 1,$
$\phi_{AB}^{L^*} = 3/8,\ \ u_1^* = 0,\ \ u_2^* = 1/8$ و $v_1^* = 3/8,$
$\phi_{AF}^{L^*} = 1/4,\ \ u_1^* = 0,\ \ u_2^* = 1/8$ و $v_1^* = 1/4,$
$\phi_{AJ}^{L^*} = 1/8,\ \ u_1^* = 0,\ \ u_2^* = 1/8$ و $v_1^* = 1/8.$

بنابراین کران پایین بازه کارایی DMU_A از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\phi_A^{L^*} = \min\{1,3/8,1/4,1/8\} = 0.1250$$

بر اساس سه مجموعه وزن‌های ورودی و خروجی بالا واضح است که فقط یکی از خروجی‌ها (خروجی 1 یا خروجی 2) در محاسبه کران پایین بازه کارایی دخالت دارد. با استفاده از مجموعه دوم از وزن‌ها، یعنی $v_1^* = 3/8$، $u_2^* = 1/8$ و $u_1^* = 0$ ما کارایی‌های زیر را برای DMU_F، DMU_H، DMU_I و DMU_J به دست آوردیم:

$$\phi_F = \phi_H = \phi_I = 3/2, \phi_J = 3$$

واضح است که همه آنها بزرگ‌تر از یک هستند. چنین نتایجی بدیهی است فرض $\max_j\{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}\} = 1$ در مدل (5) را نقض می‌کنند. بنابراین رویکرد پیشنهادی انتانی و همکاران [3] در حقیقت ناقص است.

در مقابل، ما مدل‌های کراندار (15) را که در این مقاله توسعه دادیم، برای ارزیابی مجدد مسئله به‌کار می‌بریم. برای این کار نخست ورودی و خروجی‌های ADMU و IDMU را تعیین می‌کنیم که در دو سطر آخر جدول 1 نشان داده شده‌اند. کارایی خوشبینانه ADMU به وسیله مدل (10) با مقدار $\theta_{ADMU}^* = 4.5998$ به دست آمده است. هم‌چنین کارایی بدبینانه IDMU به وسیله مدل (11) با مقدار $\varphi_{IDMU}^* = 0.3478$ به دست آمده است. برای به دست آوردن بازه‌ی کارایی هر واحد تصمیم‌گیری با استفاده از مدل‌های کراندار (15)، نخست α را به دست می‌آوریم:

$$\theta_{ADMU}^* = 4.5998 \quad \text{و} \quad \varphi_{IDMU}^* = 0.3478 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{0.3478}{4.5998} = 0.0756$$

سپس با اجرای مدل‌های کراندار (15) برای هر واحد تصمیم‌گیری، بازه کارایی ده واحد تصمیم‌گیری که در جدول 2 نشان داده شده است را به دست می‌آوریم. به‌طور واضح دیده می‌شود که مدل‌های کراندار نه تنها سه واحد تصمیم‌گیری کارای خوشبینانه را

به طور دقیق مشخص می‌کنند بلکه چهار واحد تصمیم‌گیری ناکارای بدبینانه را هم به‌طور کامل مشخص می‌کنند.

5- یک کاربرد: توزیع بار ناتو

کیم[1] و هنری[2] [11، صص228-236] خاطر نشان می‌کنند که کشورهای عضو ناتو[3] منابع خود را جمع می‌کنند تا «بارِ» حفظ اهداف اتحاد ناتو را بین خود به مشارکت بگذارند. بار خالصی که یک کشور عضو (از جمله ایالات متحده آمریکا) حمل می‌کند، حاوی ترکیبی از کمک‌ها و مخارج است. اینها خروجی‌های مدل نسبت بار هستند. کمک‌هایی که به ناتو می‌شود، شامل مخارج تحقیق و توسعه، مستقر شدن سربازان در کشور، تجهیزات نظامی، پشتیبانی سیاسی، و کمک‌های توسعه‌ای هستند. هر چه مقدار بیش‌تری از این منابع ارائه شوند، بار بیش‌تری بر آن کشور عضو وارد خواهد شد. هزینه‌ها به دخالت احتمالی در یک منازعه طرف ثالث در نتیجه دخالت ایالات متحده در این نزاع و نیاز به حمایت از منافع کشورهای عضو به موجب اتحاد مربوط می‌شوند. از این رو، هر چه هزینه‌ها بیشتر باشند، بار بیشتر خواهد بود.

ورودی‌های نسبت بار شامل منافع به‌دست آمده به‌وسیله هر کشور عضو و هزینه‌های هر کشور عضو برای آمریکا هستند. منافع شامل مؤلفه‌های اقتصادی از قبیل استخدام در صنایع دفاعی و منافع امنیتی حاصل از حمایت در مقابل تهدیدهای خارجی هستند. هر چه منافع بیشتر باشد، نشان می‌دهد که احتمالاً کشور بار کمتری بر دوش دارد که این مطلب با در نظر گرفتن این عامل به عنوان یک ورودی برای نسبت بار مطابقت دارد. هزینه‌های ایالات

---

1. Kim
2. Hendry
3. سازمان پیمان آتلانتیک شمالی یا ناتو در 4 آوریل 1949 میلادی با هدف دفاع جمعی در واشنگتن دی. سی. پایه‌گذاری شد و هم اکنون 28 عضو دارد. قلب پیمان ناتو ماده 5 آن است که در آن کشورهای امضاکننده توافق کرده‌اند حمله نظامی بر یک یا چند کشور عضو در اروپا یا آمریکای شمالی را به عنوان حمله به تمامی کشورهای عضو تلقی کنند و به مقابله آن برخیزند. براساس ماده 14 و پایانی این پیمان، متون انگلیسی و فرانسوی آن هر دو معتبر هستند، پیمان نزد دولت ایالات متحده آمریکا سپرده می‌شود و مطابق وظیفه دولت ایالات متحده نیز نسخه‌های مورد تأیید آن را برای دولت‌های امضاکننده پیمان می‌فرستد.

متحده آمریکا شامل محدودیت‌هایی هستند که هر عضو اتحاد بر راهبرد دفاعی و هزینه‌های اقتصادی ناتو برای ارائه منافع محافظتی به کشورهای عضو تحمیل می‌کند. بیشتر بودن هزینه یک کشور عضو بر ایالات متحده آمریکا نشان‌دهنده آن خواهد بود که آن کشور بار کم‌تری بر دوش دارد و نیز با در نظر گرفتن آن به عنوان یک ورودی مطابقت دارد.

انگیزه تحقیق حاضر، مطالعات قبلی بود که فقط ابعاد مخارج بازدارندگی و دفاعی را در نظر گرفته بود و از تمام عوامل دیگر صرف نظر کرده بود. هم‌چنین ما علاقه‌مند بودیم که صحت این ادعا را که ایالات متحده آمریکا بار اضافی بر دوش می‌کشد، با در نظر گرفتن مجموعه کامل‌تری از مخارج و منافع بررسی کنیم.

به خاطر اهداف متعددی که در این مسئله نهفته است و به علت تنوع منابع و اینکه امکان تبدیل آنها به یک مقیاس مشترک اندازه‌گیری وجود ندارد، کیم و هنری [11، صص 228-236] از تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی توزیع بار ناتو استفاده کردند. بر این اساس بار خالص ناتو به صورت زیر تعریف شده است:

$$\text{نسبت بار خالص} = \frac{\text{کمک‌ها و مخارج مربوط به اعضا}}{\text{کمک‌ها و مخارج مربوط به آمریکا}}$$

که در اینجا «کمک‌ها و مخارج برای اعضا» به عنوان خروجی و «کمک‌ها و مخارج برای آمریکا» به عنوان ورودی در نظر گفته شده است. از این رو نسبت بالاتر به معنای بر دوش کشیدن بار بیشتر خواهد بود، به آن معنا که کشور عضو منابع بیش‌تری ارائه کرده و هزینه‌های بیش‌تری را ایجاد می‌کند، ضمن اینکه کمک کم‌تری از آمریکا ارائه می‌شود و آمریکا منافع کم‌تری از عضویت در اتحاد ناتو می‌برد.

یکی از نگرانی‌های عمده کیم و هنری [11، صص 228-236] آن است که «وقتی (تحلیل پوششی داده‌ها) بخواهد با تعداد خیلی بیش‌تری عامل ورودی و خروجی نسبت به تعداد واحدهای مورد بررسی سر و کار داشته باشد، قدرت افتراقی آن به‌طور شدیدی تحلیل

می‌رود». آنها 24 دسته (ورودی و خروجی) بار خالص را به کار گرفتند؛ در حالی که نشان دادند که تمام 16 کشور ناتو روی مرز بار خالص (مرز تولید کارا) هستند؛ یعنی همگی نمره یک کسب کرده‌اند.[1]

کیم و هنری [11، صص 228-236] روش تحلیل پوششی داده‌های جدیدی را ابداع کردند تا تعداد واحدهای تصمیم‌گیری کارای خوشبینانه را کاهش دهند ولی ما به جای استفاده از روش آنها، از بازه کارایی برای نمره‌دهی کشورهای روی مرز بار خالص استفاده می‌کنیم. به‌علاوه مدل‌های کراندار ما را قادر می‌سازد که نه تنها کشورهای مرزی را رتبه‌بندی کنیم بلکه میان توزیع بار کشورهای مرزی نیز افتراق قایل شویم.

دقت کنید که از 24 دسته بار خالص ذکر شده در [11، صص 228-236]، از 10 دسته بار خالص زیر به عنوان ورودی‌ها و خروجی‌های خود استفاده می‌شود (برای بحث کامل درباره این دسته‌ها و نسبت بار خالص، لطفاً به کیم و هنری مراجعه کنید [11، صص 228-236]) .

الف - ورودی‌ها (منافع و مخارج برای ایالات متحده آمریکا)

x_1 (فایده) محافظت در مقابل تهدید خارجی: منظور میزان اتکا به محافظت ایالات متحده (توسط ناتو) در مقابل تهدید خارجی است.

x_2 (فایده) فواید سیاسی: منظور اندازه نسبی فواید حاصل شده برای اعضا است، زمانی که از ناتو به عنوان یک ابزار سیاسی برای پیشبرد اهداف سیاست خارجی خود استفاده می‌کنند.

x_3 (هزینه برای آمریکا) هزینه اطمینان امنیتی: منظور میزان دشواری و هزینه معمول ایجاد فواید محافظتی برای اعضای ناتو است.

x_4 (هزینه برای آمریکا) محدودیت‌ها: منظور میزان دشواری تحمیل شده بر راهبرد آمریکا (در رابطه با ناتو) به علت محدودیت‌های مرتبط با عضویت هر کشور در ناتو است.

---

1. از سال 1999 تا 2004 میلادی، ده کشور کمونیستی سابق به عضویت ناتو در آمدند و شمار اعضای ناتو به 26 کشور افزایش یافت. در سال 2008 تلاش‌هایی برای گسترش ناتو به حوزه بالتیک و پیشروی مرزهای ناتو به نزدیکی مرزهای روسیه انجام گرفت که در این بین با شروع مذاکره‌ها برای عضویت دو کشور آلبانی و کرواسی در ناتو موافقت شد.

ب- خروجی‌ها (کمک‌ها و هزینه‌ها به اعضا)

y_1 (هزینه برای اعضا) گیر افتادن: منظور، احتمال وارد شدن اعضا ناتو در یک نزاع با طرف ثالث به خاطر وجود سربازان و تأسیسات آمریکایی در خاک آنها است.

y_2 (هزینه برای اعضا) زیردستی: منظور، پیروی کشورهای عضو از آمریکا در زمینه سیاست‌های داخلی و خارجی و منافع ملی است.

y_3 (هزینه برای اعضا) هزینه‌های اجتماعی: منظور میزان نسبی واکنش منفی به خاطر حضور نیروها و تأسیسات آمریکایی در خاک اعضای ناتو است.

y_4 (کمک) میزبانی تأسیسات: منظور اهمیت تأسیسات قرار گرفته در خاک اعضای ناتو برای راهبردهای ناتو (در رابطه با آمریکا) است.

y_5 (کمک) حمایت سیاسی: منظور میزان حمایت سیاسی اعضا از آمریکا (ناتو) است.

y_6 (کمک) تمایل اجتماعی: منظور میزان تمایل بین آمریکا و اعضای ناتو، از نظر قومیت، زبان و سیستم‌های سیاسی، اجتماعی و اقتصادی است.

5-1- نتایج

داده‌های مربوط به عوامل بالا درباره شانزده کشور عضو ناتو (واحد تصمیم‌گیری) در جدول 3 ارائه شده است. زمانی که واحدهای تصمیم‌گیری را با استفاده از مدل (1) ارزیابی می‌کنیم، شش واحد تصمیم‌گیری (کانادا، آلمان، هلند، اسپانیا، ترکیه و انگلستان)، به عنوان کارای خوشبینانه (که نشان‌دهنده‌ی شاخص بار خالص 100 درصد است) شناسایی می‌شوند. این به نوبه خود نشان می‌دهد که این شش واحد تصمیم‌گیری کارای خوشبینانه، بار خالص متوازنی را به طور مساوی بین خود توزیع کرده‌اند. هم‌چنین در ارزیابی این واحدهای تصمیم‌گیری با استفاده از مدل (2)، هفت واحد تصمیم‌گیری (بلژیک، دانمارک، فرانسه، آلمان، نروژ، ترکیه و آمریکا)، به عنوان ناکارای بدبینانه شناسایی می‌شوند. نتایج در جدول 4 ارائه شده است.

جدول 2 داده‌های ورودی و خروجی برای اعضای ناتو

عضو ناتو	ورودی‌ها				خروجی‌ها				
	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
بلژیک	5/01	3	9/66	4/91	1/92	3/33	3/95	4/13	6/11
کانادا	1/28	2/3	2/12	1/42	11/5	10/6	1/46	10/81	4/66
دانمارک	7/22	3/5	10/7	14/4	10/8	2/54	1/95	12/29	2/79
فرانسه	4/05	2	5/68	18/6	1/41	1/47	1/69	1/53	1/96
آلمان	16	13/8	19/6	2/92	10/2	13/7	20/2	3/93	15/23
یونان	2/91	4/7	4/3	6/13	2/61	10/1	8/37	3/94	2/27
ایسلند	13/4	4/1	4/77	6/03	10/4	3/92	7/16	3/93	3/25
ایتالیا	2/4	7/6	3/41	3/72	6/77	8/67	6/78	9/92	11/31
لوگزامبورگ	12/2	4	3/93	3/23	1/66	2/27	2/76	1/96	5/95
هلند	6	2/9	8/55	5/25	2/36	3/33	4/18	3/98	6/28
نروژ	8.86	4	12/5	12/1	3/73	3/09	2/24	5/27	3/99
پرتغال	1/53	4/4	2/93	5/42	3/09	9/25	3	4/69	5/13
اسپانیا	1/13	4/2	2/86	5/59	16/6	8/96	10/9	10/37	4/39
ترکیه	4/43	5	4/94	6/79	5/54	15/7	9/62	7/72	5/88
انگلستان	2/05	13/2	2/7	2/28	14/4	2/01	14/5	14/18	18/7
آمریکا	11/5	21/2	1/43	1/27	1/05	1/08	1/27	1/34	2/09
IDMU	1/13	2	1/43	1/27	16/6	15/7	20/2	14/18	18/7
ADMU	16	21/22	19/6	18/6	1/05	1/08	1/27	1/34	1/96

توجه: x_1: محافظت در مقابل تهدید خارجی؛ x_2: فواید سیاسی؛ x_3: هزینه اطمینان امنیتی؛ x_4: محدودیت‌ها؛ y_1: گیر افتادن؛ y_2: زیردستی؛ y_3: هزینه‌های اجتماعی؛ y_4: میزبانی تأسیسات؛ y_5: حمایت سیاسی؛ y_6: تمایل اجتماعی

با انجام رویکرد ارائه شده در این مقاله، $\theta^*_{ADMU} = 6.5028$، $\varphi^*_{IDMU} = 0.1498$ و

$\alpha = 0.0230$ به دست می‌آید. در ارزیابی کارایی با استفاده از مدل‌های کراندار (15)، شش واحد تصمیم‌گیری به عنوان کارای خوشبینانه و هفت واحد تصمیم‌گیری به عنوان ناکارای بدبینانه شناسایی می‌شوند ، از این رو بینش‌های بیشتری را درباره توزیع بار نسبی ارائه می‌کنند. بازه کارایی این شانزده واحد تصمیم‌گیری در جدول 4 ارائه شده است. هم‌چنین پنج کشور (یونان، ایسلند، ایتالیا، لوگزامبورگ و پرتقال) به صورت واحدهای نامعین شناسایی شده‌اند. مشاهده می‌شود که در ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری با استفاده از مدل‌های کراندار (15)، تنها به حل 34 مدل برنامه‌ریزی خطی نیاز است. یکی برای محاسبه کارایی خوشبینانه واحد تصمیم‌گیری آنتی‌ایده‌آل و یکی نیز برای محاسبه کارایی بدبینانه واحد تصمیم‌گیری ایده‌آل. از 32 مدل برنامه‌ریزی خطی دیگر، 16 مدل برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه کران بالای بازه کارایی و 16 مدل برنامه‌ریزی خطی نیز برای محاسبه کران پایین بازه کارایی شانزده واحد تصمیم‌گیری حل می‌شود. از آن جایی که در این مثال شش واحد تصمیم‌گیری به عنوان کارای خوشبینانه شناسایی شده‌اند، مدل‌های انتانی و همکاران [3] نیاز به حل کردن 112 مدل برنامه‌ریزی خطی دارند. از این 112 مدل برنامه‌ریزی خطی، 16 مدل برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه کران بالای بازه کارایی و 6 × 16 مدل برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه کران پایین بازه کارایی شانزده واحد تصمیم‌گیری حل می‌شود. مهم‌تر اینکه مدل کران پایین انتانی و همکاران [3، صص 32-45]، فقط یک واحد تصمیم‌گیری، یعنی DMU_{13} را به عنوان واحد تصمیم‌گیری کارای خوشبینانه شناسایی می‌کند که کم‌ترین مقدار کران پایین بازه کارایی را در بین شانزده واحد تصمیم‌گیری دارد، اما پنج واحد تصمیم‌گیری کارای خوشبینانه دیگر را نمی‌تواند شناسایی کند. این مثال کاربردپذیری و قدرت افتراق مدل‌های کراندار پیشنهادی در این مقاله را افزایش می‌دهد.

جدول 3 کارایی‌های نسبی و بازه کارایی برای اعضای ناتو

عضو ناتو	کارایی بدبینانه	کارایی خوشبینانه	بازه کارایی	
			مدل‌های انتانی و همکاران	مدل‌های کراندار (15)
بلژیک	1/0000	1/0199	[0.0433, 1.0000]	[0.0235, 1.0000]
کانادا	0/3145	1/0000	[0.0094, 0.3145]	[0.0230, 0.3145]
دانمارک	1/0000	1/3080	[0.0161, 1.0000]	[0.0301, 1.0000]
فرانسه	1/0000	1/8448	[0.0359, 1.0000]	[0.0424, 1.0000]
آلمان	1/0000	1/0000	[0.0131, 1.0000]	[0.0230, 1.0000]
یونان	0/9521	1/2451	[0.0237, 0.9521]	[0.0286, 0.9521]
ایسلند	0/9296	1/2597	[0.0195, 0.9296]	[0.0290, 0.9296]
ایتالیا	0/5319	1/0838	[0.0260, 0.5319]	[0.0249, 0.5319]
لوگزامبورگ	0/9742	1/2917	[0.0572, 0.9742]	[0.0297, 0.9742]
هلند	0/8164	1/0000	[0.0193, 0.8164]	[0.0230, 0.8164]
نروژ	1/0000	1/0752	[0.0480, 1.0000]	[0.0477, 1.0000]
پرتغال	0/6355	1/2489	[0.0155, 0.6355]	[0.0287, 0.6355]
اسپانیا	0/5732	1/0000	[0.0062, 0.5732]	[0.0230, 0.5732]
ترکیه	1/0000	1/0000	[0.0162, 1.0000]	[0.0230, 1.0000]
انگلستان	0/5378	1/0000	[0.0120, 0.5378]	[0.0230, 0.5378]
آمریکا	1/0000	3/3700	[0.0640, 1.0000]	[0.0775, 1.0000]

هم‌چنین توجه کنید که مدل (2) برای چهار کشور ناتو که کارای خوشبینانه هستند- کانادا، هلند، اسپانیا و انگلستان- نمره کمتر از یک به دست می‌دهد؛ یعنی این چهار کشور به موجب کارایی‌های به دست آمده از مدل‌های (1) و (2) به ترتیب در رتبه اول، چهارم، سوم و دوم قرار می‌گیرند. این امر قدرت افتراقی تحلیل پوششی داده‌ها را در ارزیابی واحدهای کارا افزایش می‌دهد. همچنین، با در نظر گرفتن همزمان کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه برای آمریکا، این کشور در رتبه شانزدهم قرار می‌گیرد. مثال دیگر در تفسیر به فرانسه و دانمارک مربوط می‌شود. نمره کارایی حاصل از مدل‌های (1) و (2) برای فرانسه و دانمارک نشان می‌دهد که فرانسه بار خالص بیش‌تری بر دوش دارد. در تحلیل کشورهای بلژیک و نروژ می‌توان گفت که بلژیک در رتبه بهتری نسبت به نروژ قرار دارد. اما رویکرد ما از شناسایی کشورهای مرزی جلوتر می‌رود. این رویکرد رتبه توزیع بار فردی هر کشور را نیز تعیین می‌کند، از این رو بینش‌های بیش‌تری را درباره توزیع بار نسبی ارائه می‌کند.

هم‌چنین این یافته‌ها نشان می‌دهد که اگر از نمره کارایی خوشبینانه استفاده شود، باید به کارایی‌های بدبینانه توجه دقیق شود تا اطمینان حاصل شود که تفسیر نتایج نسبت به اختلاف نمره‌ها و رتبه‌های مشاهده شده در مثال ناتو حساس است.

6- ملاحظات پایانی

عملکرد واحد تصمیم‌گیری را از دیدگاه‌های مختلفی می‌توان اندازه‌گیری کرد. در این صورت نتایج آنها بسیار گمراه‌کننده و حتی متناقض است. بنابراین این ضرورت انکارناپذیر است که باید اندازه‌های مختلف عملکرد را ادغام کرد تا یک ارزیابی کلی از عملکرد هر واحد تصمیم‌گیری به دست آید. در این مقاله، ما مدل‌های کراندار را برای اندازه‌گیری عملکرد کلی واحدهای تصمیم‌گیری توسعه دادیم. نشان داده شد که مدل‌های

کراندار مزیت قابل توجهی نسبت به روش‌های فعلی برای ارزیابی واحد تصمیم‌گیری دارند.

مدل‌های کراندار پیشنهادی ما در مقایسه با مدل‌های انتانی و همکاران چندین مزایای دارد [3، صص 32-453]. نخست همه واحدهای تصمیم‌گیری کارای خوشبینانه و ناکارای بدبینانه را به طور صحیح و کامل شناسایی می‌کنند. همه واحدهای تصمیم‌گیری کارای خوشبینانه یک مرز کارایی را تشکیل می‌دهند، در حالی که تمام واحدهای تصمیم‌گیری ناکارای بدبینانه یک مرز ناکارایی را تشکیل می‌دهند. دوم، بیش‌ترین استفاده را از تمام داده‌های ورودی و خروجی در فرایند محاسبه کارایی‌های کران بالا و پایین هر واحد تصمیم‌گیری به کار می‌گیرند. درنهایت نیز مدل‌های کراندار پیشنهادی ما برای محاسبه بازه کارایی n واحد تصمیم‌گیری تنها به حل $2n+2$ مدل برنامه‌ریزی خطی نیاز دارند. یکی برای محاسبه کارایی خوشبینانه ADMU و یکی نیز برای محاسبه کارایی بدبینانه IDMU. از $2n$ مدل برنامه‌ریزی خطی دیگر، n مدل برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه کران بالای بازه کارایی و n مدل برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه کران پایین بازه کارایی n واحد تصمیم‌گیری حل می‌شود. اما مدل‌های انتانی و همکاران [3، صص 32-453] نیاز به حل کردن $(d+1)n$ مدل برنامه‌ریزی خطی دارند که d نشان دهنده تعداد واحدهای تصمیم‌گیری ناکارای بدبینانه می‌باشد. از این $(d+1)n$ مدل برنامه‌ریزی خطی، n مدل برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه کران بالای بازه کارایی و dn مدل برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه کران پایین بازه کارایی n واحد تصمیم‌گیری حل می‌شود. مهم‌تر اینکه مدل کران پایین انتانی و همکاران [3، صص 32-453] قادر به شناسایی تمام واحدهای تصمیم‌گیری کارای خوشبینانه نیست.

کاربرد تجربی برای توزیع بار ناتو، نشان‌دهنده اندازه‌های بهبود یافته کارایی است که با استفاده از مدل‌های کراندار پیشنهادی در این مقاله در مقایسه با مدل‌های انتانی و همکاران [3، صص 32-453] امکان‌پذیر است. یافته‌های تجربی مقاله حاضر، مطلب

بیان شده در [11، صص 228-236] را تأیید می‌کند که رویکردهای سنتی اقتصاددانان برای توزیع بار ناتو تأثیر قوی توزیع بار برخی از کشورهای کوچک‌تر را ندیده گرفته‌اند. این ناشی از آن است که این‌گونه رویکردها فقط روی قابلیت نظامی تأکید می‌کنند. مطالعه حاضر، تحلیل جامع‌تری از توزیع بار ناتو را با در نظر گرفتن عوامل سیاسی، اجتماعی و اقتصادی ارائه کرده است. ارزیابی‌های ما نشان می‌دهد که ایالات متحده بار سنگینی را در مقایسه با سایر اعضای ناتو بر دوش می‌کشد. هم‌چنین کشورهای کانادا، انگلستان، اسپانیا و هلند به‌ترتیب در رتبه‌های اول تا چهارم قرار دارند. اما داده‌های مطالعه ما ممکن است به طور کامل منعکس‌کننده شرایط اقتصادی و سیاسی جهان نباشد. با این وجود روش پیشنهادی برای ارزیابی توزیع بار ممکن است بینش‌های ارزشمندی را درباره تأثیر تغییرات سیاست، اقتصاد و فناوری نظامی نشان دهد.

7- سپاسگزاری

مؤلف مایل است که از بررسی‌کنندگان ناشناس به خاطر پیشنهادها و نظرهای ارزنده آنان تشکر کند.

8- منابع

[1] Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E.; "Measuring the efficiency of decision making units"; *European Journal of Operational Research*, No. 2, 1978.

[2] Parkan C., Wang Y.-M.; *Worst Efficiency Analysis Based on Inefficient Production Frontier*, Working Paper, Department of Management Sciences, City University of Hong Kong, 2000.

[3] Entani T., Maeda Y., Tanaka H.; "Dual models of interval DEA and its extension to interval data"; *European Journal of Operational Research*, No. 136, 2002.

[4] Azizi H., Fathi Ajirlu S.; "Measurement of overall performances of decision-making units using ideal and anti-ideal decision-making units"; *Computers & Industrial Engineering*, No. 59, 2010.

[5] Wang Y.-M., Yang J.-B.; "Measuring the performances of decision-making units using interval efficiencies"; *Journal of Computational and Applied Mathematics*, No. 198, 2007.

[6] N.-S. Wang, Yi R.-H., Wang W.; "Evaluating the performances of decision-making units based on interval efficiencies"; *Journal of Computational and Applied Mathematics*, No. 216, 2008.

[7] Azizi H., Jahed R.; "An improvement for efficiency interval: Efficient and inefficient frontiers"; *International Journal of Applied Operational Research*, No. 1, 2011.

[8] Charnes A., Cooper W.W.; "Programming with fractional function"; *Naval Research Logistics Quarterly*, No. 9, 1962.

[9] Wang Y.-M., Chin K.-S., Yang J.-B.; "Measuring the performances of decision making units using geometric average efficiency"; *Journal of the Operational Research Society*, No. 58, 2007.

[10] Azizi H.; "The interval efficiency based on the optimistic and pessimistic points of view;"*Applied Mathematical Modelling*, No. 35, 2011.

[11] Kim I., Hendry L.C.; "Using DEA to assess NATO burden-sharing"; *Journal of the Operational Research Society*, No. 49, 1998.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

Measuring the overall performances of decision-making units: An application to burden-sharing amongst NATO member nations

Hossein Azizi

M.Sc., Instructor, Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch, Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.
E-mail addresses: hazizi@iaupmogan.ac.ir; azizhossein@gmail.com (H. Azizi)
Received Date: 4 March 2013
Accepted Date: 2 June 2013

Abstract

Data envelopment analysis (DEA) has proven very useful in evaluating relative efficiencies of decision-making units (DMUs) with multiple outputs and multiple inputs. The conventional form of data envelopment analysis evaluates performances of decision-making units only from the optimistic point of view. In other words, it chooses a set of the most favorable weights for each decision-making unit. There is another approach that measures the efficiency of a decision-making unit from the pessimistic point of view. This approach chooses a set of the most unfavorable weights for evaluation of each decision-making unit. In this paper, we propose to integrate both efficiencies in the form of an interval in order to measure the overall performance of a decision-making unit. The proposed data envelopment analysis models for evaluation of efficiencies are called bounded data envelopment analysis models. The proposed approach will be compared using a numerical example. Another example about assessment of burden-sharing among members of the North Atlantic Treaty Organization (NATO) will be presented to illustrate the advantages, simplicity, and utility of this approach in real-life situations.

Keywords: *Data envelopment analysis; interval efficiency; optimistic and pessimistic efficiencies; bounded models*.