معرفت فلسفی سال هفتم، شماره چهارم، تابستان ۱۳۸۹، ۳۹-۵۶

قضیهٔ خارجیه در منطق حذف این‌همانی و منطق مرتبهٔ دوم هنکین

اسدالّله فلاحی*

چکیده

نگارنده پیش از این در دو مقاله به تحلیل قضایای حقیقیه و خارجیه به کمک منطق جدید پرداخته بود که یکی منطق موجّهات جدید را برای صورت‌بندی قضایای حقیقیه، و دیگری محمول تعریف ناشدهٔ وجود را برای فرمول‌بندی قضایای خارجیه به کار گرفته است. مقالهٔ دوم، تعریف‌هایی از وجود در منطق این‌همانی و منطق مرتبهٔ دوم ارائه کرده است، امّا نتوانسته از این تعریف‌ها در تحلیل قضایای خارجیه کمک بگیرد.

در این مقاله، با نشان دادن ضعف‌های بنیادین منطق این‌همانی و منطق مرتبهٔ دوم در تحلیل قضایای خارجیه و با نشان دادن تعارض اصل این‌همانی با قاعدهٔ فرعیه، منطقی ضعیف‌تر از منطق این‌همانی به نام «منطق حذف این‌همانی» را طراحی کرده‌ایم که به خوبی توان بیان قضایای خارجیه را دارد. همچنین، منطق ضعیف‌تری نسبت به منطق مرتبهٔ دوم استاندارد را، که به نام «منطق مرتبهٔ دوم هنکین» شناخته می‌شود، به خدمت گرفته و نشان داده‌ایم که این منطق، برخلاف منطق مرتبهٔ دومِ استاندارد، می‌تواند قضایای خارجیه را به خوبی صورت‌بندی کند. در ضمن، نشان داده‌ایم که منطق هنکین با مفاهیم ماهوی و معقولات اولی، و منطق استاندارد با مفاهیم انتزاعی و معقولات ثانیه تناسب دارد.

کلیدواژه‌ها: قضیهٔ حقیقیه، قضیهٔ خارجیه، منطق حذف این‌همانی، منطق مرتبهٔ دومِ استاندارد، منطق مرتبهٔ دوم هنکین، معقولات اولی، معقولات ثانیه.

---

* استادیار دانشگاه زنجان. falahiy@yahoo.com
دریافت: ۸۸/۷/۱۵ ـ **پذیرش:** ۸۹/۳/۲۰.

مقدّمه

قضایای حقیقیه و خارجیه را به روش‌های گوناگونی به زبان منطق جدید صورت‌بندی کرده‌اند. جدیدترین صورت‌بندی از قضایای حقیقیه را نگارنده در دو مقالهٔ اخیر خود در منطق وجهی و منطق محمول‌ها و وجود ارائه کرده است. تحلیل نگارنده از قضایای حقیقیه و خارجیه در منطق وجهی بدین‌گونه است:[۱]

	خارجیه	حقیقیه
هر الف ب است	$\exists x\ Ax \wedge \forall x(Ax \rightarrow Bx)$	$\Diamond \exists x\ Ax \wedge \Box\ \forall x(Ax \rightarrow Bx)$
هیچ الف ب نیست	$\forall x(Ax \rightarrow \sim Bx)$	$\Box\ \forall x(Ax \rightarrow \sim Bx)$
بعضی الف ب است	$\exists x(Ax \wedge Bx)$	$\Diamond \exists x(Ax \wedge Bx)$
بعضی الف ب نیست	$\sim \exists x\ Ax \vee \exists x(Ax \wedge \sim Bx)$	$\sim\Diamond \exists x\ Ax \vee \Diamond \exists x(Ax \wedge \sim Bx)$

تحلیل نگارنده از همین قضایا در منطق محمول‌ها و وجود نیز به قرار زیر است:[۲]

	خارجیه	حقیقیه
هر الف ب است	$\exists x\ (E!x \wedge Ax) \wedge \forall x\ [E!x \rightarrow (Ax \rightarrow Bx)]$	$\exists x\ Ax \wedge \forall x(Ax \rightarrow Bx)$
هیچ الف ب نیست	$\forall x\ [E!x \rightarrow (Ax \rightarrow \sim Bx)]$	$\forall x(Ax \rightarrow \sim Bx)$
بعضی الف ب است	$\exists x\ [E!x \wedge (Ax \wedge Bx)]$	$\exists x\ (Ax \wedge Bx)$
بعضی الف ب نیست	$\sim \exists x\ (E!x \wedge Ax) \vee \exists x\ [E!x \wedge (Ax \wedge \sim Bx)]$	$\sim\exists x\ Ax \vee \exists x\ (Ax \wedge \sim Bx)$

نگارنده در مقالهٔ اخیر خود، چهار تعریف زیر برای وجود محمولی (یعنی برای E!x) از منطق آزاد و منطق مرتبهٔ دوم نقل می‌کند:[۳]

وجود	۱. اتحاد با یک شی	منطق آزاد	$\exists y(x=y)$
محمولی	۲. اتحاد با خود	منطق آزاد	$x=x$
در منطق	۳. داشتن صفت	منطق مرتبهٔ دوم	$\exists F\ Fx$
جدید	۴. داشتن صفت امکانی	منطق مرتبهٔ دوم	$\exists F\ (Fx \wedge \sim \Box\ Fx)$

به نظر می‌رسد که هریک از این تعاریف را مـی‌توان در صـورت‌بندی قـضایای خـارجـیه

جایگزین E!x کرد؛ امّا به دلیل اینکه سه تعریف نخست، قضیه‌اند و بنابراین در ترکیب عطفی و در مقدّم شرطی، حذف می‌شوند، جایگزین کردن سه تعریف نخست، سبب می‌شود فرمول‌های قضایای خارجیه، معادل و هم‌ارزِ فرمول‌های قضایای حقیقیه شود و همین مسئله، تمایز میان این قضایا را نابود می‌سازد. تعریف چهارم نیز چندان مقبول به نظر نمی‌رسد؛ زیرا مدعی است «وجود داشتن» به معنای «داشتن صفت غیرضروری» است. اگر این تعریف درست باشد، الحاد و نفی خداوند لازم خواهد آمد؛ زیرا چنانکه فلاسفه متألّه نشان داده‌اند، خداوند از همهٔ جهات، ضروری و واجب‌الوجود است و هیچ صفت امکانی‌ای ندارد.

در این مقاله می‌خواهیم نشان دهیم که سه تعریف نخست را می‌توان جایگزین E!x کرد، بدون اینکه قضایای حقیقیه و خارجیه به یکدیگر فروکاسته شوند. لازمهٔ این کار، طراحی نظامی منطقی است که این سه تعریف در آنها قضیه و قابل اثبات‌پذیر نباشد. برای این کار، دو منطق به نام‌های «منطق حذف این‌همانی» و «منطق مرتبهٔ دوم هنکین» را معرفی خواهیم کرد که منطق اول برای نخستین بار ارائه می‌شود، امّا منطق هنکین در ادبیات منطق مرتبهٔ دوم، کاملاً شناخته‌شده است.(۴)

منطق حذف این‌همانی

۱. نظام استنتاجی

منطق محمول‌ها و این‌همانی شامل دو قاعدهٔ اختصاصی به نام‌های «معرفی این‌همانی» و «حذف این‌همانی» است:

حذف این‌همانی	معرفی این‌همانی
Fa	
$a=b$	
———	———
$\therefore Fb$	$\therefore a=a$

از میان این دو قاعده، «معرفی این‌همانی» قاعده‌ای بسیار معروف است که غالباً با نام «اصل این‌همانی» به *ارسطو* نسبت داده می‌شود و هم‌طراز «اصل تناقض» (وگاهی بالاتر از آن) به شمار می‌آید. با وجود این، باید توجه کرد که این اصل و قانون، تنها در عالم وجود و جهان واقعی برقرار است و در جهان‌های ممکنِ فرضی و عالم معدومات. دلیل این مسئله، قاعده‌ای دیگر به نام «قاعدهٔ فرعیه» است که بر اصل این‌همانی تسلط دارد و صورت‌بندی عمومی آن بدین‌گونه است: «ثبوت شیء لشیء فرع ثبوت المثبت له». بنا به این قاعدهٔ جدید، حمل محمول بر موضوع، در قضایای موجبه، فرع بر وجود موضوع است؛ در نتیجه اگر موضوع موجود نباشد، هیچ چیزی را نمی‌توان بر آن حمل کرد، حتی خود آن شیء را. بنابراین، معدومات هیچ حکم‌ایجابی‌ای ندارند و برای نمونه، نمی‌توان گفت «سندباد ماجراجوست» و یا حتی «سندباد، سندباد است».

از اینجا معلوم می‌شود که اگر بخواهیم منطقی بسازیم که نه تنها قواعد حاکم بر موجودات، بلکه قواعد معدومات را نیز بیان کند، چاره‌ای نداریم جز اینکه قاعدهٔ «معرفی این‌همانی» را از قواعد استنتاجی کنار بگذاریم؛ امّا کنار گذاشتن این قاعده به اثبات‌ناپذیری بسیاری از قوانین مطلوب این‌همانی مانند تقارن می‌انجامد. توضیح اینکه با رها کردن قاعدهٔ معرفی این‌همانی، نه تنها قوانین نامطلوب زیر اثبات‌پذیر نخواهند بود:

انعکاس	$a=a$
انعکاس کلی	$\forall x\ (x=x)$
وجود برای نام‌های خاص	$\exists x\ (x=a)$
وجود همگانی ۱	$\forall x\ \exists y\ (x=y)$
وجود همگانی ۲	$\forall x\ \exists y\ (y=x)$

بلکه قوانین مطلوب زیر نیز از دست خواهند رفت:

تقارن	$\forall x\ \forall y\ (x=y \rightarrow y=x)$
خودهمانی این‌همان‌ها ۱	$\forall x\ \forall y\ (x=y \rightarrow x=x)$
اصل اقلیدس ۱	$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x=z \wedge y=z \rightarrow x=y)$

مقصود از «اصل اقلیدس» این قانون معروف است که «دو شیء برابر با شیء سوم، خود با یکدیگر برابرند». این اصل، تقریرهای دیگری نیز دارد که تقریر بالا تقریر نخست آن است و از این‌رو، با شمارهٔ یک نشان داده شده است.

با وجود این، نباید گمان کنیم که همهٔ قضایای مطلوب این‌همانی از دست رفته‌اند؛ زیرا قضایای زیر، تنها به کمک قاعدهٔ حذف این‌همانی اثبات‌پذیرند:

$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x=y \wedge y=z \rightarrow x=z)$	تعدی
$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x=y \wedge x=z \rightarrow y=z)$	اصل اقلیدس ۲
$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x=y \wedge x=z \rightarrow z=y)$	اصل اقلیدس ۳
$\forall x\, \forall y\, (x=y \rightarrow y=y)$	خودهمانی این‌همان‌ها ۲
$(a=a) \leftrightarrow \exists x\, (x=a)$	هم‌ارزی دو تعریف وجود
$\forall x\, (x=x) \leftrightarrow \forall x\, \exists y\, (y=x)$	هم‌ارزی انعکاس کلی با وجود همگانی ۲

برای جبران قضایای مطلوب از دست رفته چه می‌توان کرد؟ برای جبران این کاستی، ناگزیریم هر دو صورت قاعدهٔ حذف این‌همانی را به منزلهٔ قاعدهٔ اصلی داشته باشیم. با این اصلاح، «منطق حذف این‌همانی» برابر است با منطق محمول‌ها به همراه دو قاعدهٔ زیر:

حذف این‌همانی چپ	حذف این‌همانی راست
Fa	Fa
$b=a$	$a=b$
$\therefore Fb$	$\therefore Fb$

۲. سمانتیک منطق حذف این‌همانی

هر تغییری در قواعد استنتاجی، باید با تغییری در سمانتیک همراه باشد تا صحت و تمامیت نظام برجا بماند. برای این کار، باید به سمانتیک «منطق محمول‌ها و این‌همانی» نظر بیفکنیم و ببینیم کدام ویژگی اساسی است که باید تعدیل شود.

در سمانتیک استاندارد، به هر محمول‌نشانه n- موضعی، زیرمجموعه‌ای دلخواه از توان nام دامنهٔ سخن را اسناد می‌دهند؛ امّا به محمول‌نشانهٔ دوموضعی این‌همانی، زیرمجموعهٔ قطری از توان دوم دامنهٔ سخن را نسبت داده‌اند. این بدان معناست که مجموعهٔ همهٔ زوج مرتب‌هایی که دو عضوشان یکی است به محمول «این‌همانی» نسبت داده می‌شود. بر پایهٔ این قرارداد، هر عضوی از دامنهٔ سخن، این‌همان با خود خواهد بود.

اگر بخواهیم دامنهٔ سخن، معدومات نیز دربر گیرد، بنا به قاعدهٔ فرعیه، آن معدومات نباید هیچ حکمی داشته باشند و مهم‌تر از همه اینکه نباید این‌همان با خود باشند. بنابراین دیگر لازم نیست که مجموعهٔ همهٔ زوج مرتب‌هایی که دو عضوشان یکی است، به محمول «این‌همانی» نسبت داده شود؛ بلکه کافی است مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هایی که دو عضوشان یکی است، به محمول «این‌همانی» نسبت دهیم؛ و به عبارت سوم، زیرمجموعه‌ای از قطر توان دوم دامنهٔ سخن را.

تا اینجا معادل سمانتیکی کنار گذاشتن قاعدهٔ «معرفی این‌همانی» را به دست آوردیم؛ امّا دربارهٔ «قاعدهٔ فرعیه» چطور؟ آنچه تاکنون انجام دادیم، رعایت قاعدهٔ فرعیه دربارهٔ محمول‌نشانهٔ این‌همانی بود. اینکه بخواهیم قاعدهٔ فرعیه را به دیگر محمول‌نشانه‌ها نیز تعمیم دهیم، امری اختیاری است و تنها تفاوت این است که اگر به این تعمیم پایبند باشیم، منطق حاصل، به منطق قدیم وفادارتر خواهد بود. از آنجاکه مقصود این مقاله وفاداری صددرصد به منطق قدیم نیست، بر خود بایسته نمی‌بینیم که تعمیم قاعدهٔ فرعیه به همهٔ محمول‌نشانه‌ها و پیامدهای استنتاجی آن را بررسی کنیم؛ امّا چون به نظر می‌رسد بیشتر خوانندگان، وفاداری هر چه بیشتر به منطق قدیم خوشایندتر است، به صورت گذرا به این تعمیم و پیامدهای آن می‌پردازیم تا خواننده هرجاکه نیاز باشد خود بتواند به این تعمیم دست یازد؛ با وجود این، این تعمیم، در کلّیت این مقاله، جایگاه تعیین‌کننده‌ای ندارد.

برای تعمیم قاعدهٔ فرعیه به سایر محمول‌نشانه‌ها کافی است به هر محمول‌نشانهٔ n- موضعی، زیرمجموعه‌ای دلخواه از توان nام مجموعه موجودات دامنه سخن را اسناد دهیم. در این صورت، قاعدهٔ استنتاجی زیر باید به نظام استنتاجی افزوده شود:

اگر F محمول‌نشانه‌ای n‌ـ موضعی باشد آنگاه:

$$\frac{Fa_1 \ldots a_n}{\therefore\ a_1=a_1 \wedge \ldots \wedge a_n=a_n}$$

۳. منطق حذف این‌همانی و منطق محمول‌ها و وجود

در منطق حذف این‌همانی، مشابه آنچه از مقالهٔ «تحلیل قضایای خارجیه با محمول وجود» نقل کردیم، می‌توان وجود را تعریف کرد؛ برای نمونه به دو صورت زیر:

$$E!a \quad =_{\text{تع}} \quad a=a$$

$$E!a \quad =_{\text{تع}} \quad \exists x(a=x)$$

قضیهٔ «هم‌ارزی دو تعریف وجود»، که در بخش نظام استنتاجی ارائه شد، نشان می‌دهد که افزودن هریک از این دو تعریف به منطق حذف این‌همانی، دیگری را نتیجه می‌دهد و ما را به منطق استاندارد این‌همانی می‌رساند. توجه کنید که عکس این کار شدنی نیست؛ یعنی نمی‌توانیم این‌همانی را در منطق محمول‌ها و وجود تعریف کنیم. شاید به نظر برسد که عکس تعریف بالا کاملاً معقول است: $a=a \quad =_{\text{تع}} \quad E!a$

با این حال به این تعریف جدید، ایرادی وارد است: اگر این‌همانی را در منطق محمول‌ها و وجود تعریف کنیم، نمی‌توانیم قاعدهٔ «حذف این‌همانی» را اثبات کنیم؛ زیرا محمول E! در منطق محمول‌ها و وجود، هیچ قاعدهٔ استنتاجی ویژه‌ای ندارد؛ برخلاف محمول این‌همانی که در منطق حذف این‌همانی، قاعدهٔ ویژه دارد.

منطق مرتبه دوم هنکین

در مقدّمه دیدیم که تعریف وجود در منطق مرتبهٔ دوم استاندارد (یعنی تعریف E!x به ∃F Fx، و به عبارت دیگر، تعریف «وجود داشتن» به «داشتن یک صفت») به این ایراد دچار است که این تعریف در این منطق، قضیه است و از این‌رو، قضایای خارجیه را به قضایای حقیقیه فرو می‌کاهد. برای اینکه دلیل این مسئله را به دست بیاوریم، لازم است برهان این قضیه را بررسی

کنیم و ببینیم چه قواعدی سبب اثبات این قضیه می‌شود و از میان این قواعد، کدام‌یک، منشأ اشکال است. برهان بدین قرار است:

1. $Ax \vee \sim Ax$ معرفی قضیه

2. $\exists F\ Fx$ معرفی سور جزئی (۱)

در این برهان، می‌بینیم قضیه‌ای از منطق مرتبهٔ اول که می‌گوید «x یا صفت A را دارد یا ندارد» ارائه شده است؛ امّا می‌توان «داشتن یا نداشتن صفت A» را یک صفت در نظر گرفت که x متصف به آن است. بنابراین، می‌توان گفت که x صفتی دارد. این همان چیزی است که قاعدهٔ «معرفی سور جزئی» انجام داده و به سطر ۲ رسیده است.

بدون شک، x یا صفت A را دارد یا ندارد؛ از این رو، سطر ۱ برهان یادشده بی‌اشکال می‌نماید. بنابراین، اگر اشکال و ایرادی هست، باید در سطر دوم، و مربوط به قاعدهٔ «معرفی سور جزئی» در منطق مرتبهٔ دوم باشد: می‌توان در این مقدّمه که «داشتن یا نداشتن صفت A» خود یک صفت برای x است تردید کرد. آیا صفات مرکب که از ترکیب صفات اولیه و ادات منطقی مانند ناقض، عاطف، فاصل، شرطی، دوشرطی ساخته می‌شوند، صفات حقیقی شیء به شمار می‌آیند؟ برای پاسخ به این پرسش، باید مقصود خود را از «صفت حقیقی» بیان کنیم. اگر مقصود ما از «صفت حقیقی» مفاهیم ماهوی و معقولات اولی باشد، بدون شک، صفاتی را که دربردارندهٔ ادات منطقی‌اند نمی‌توانیم «صفت حقیقی» بنامیم؛ زیرا ادات‌های منطقی، حاصلِ «تأمّلات» و «تعملات» ذهنی‌اند و از عمل مقایسه‌ای که ذهن میان مفاهیم پیشین خود انجام می‌دهد به دست می‌آیند؛ امّا اگر مقصود از «صفت حقیقی»، دربرگیرندهٔ معقولات اولی و ثانیه باشد، بدون شک این صفات صفات حقیقی خواهند بود.

در منطق مرتبهٔ دوم استاندارد، وقتی می‌گوییم، $\forall F$ و $\exists F$ مرادمان از «همهٔ صفات» و «برخی صفات» اعم از معقول اولی و معقول ثانی است و صفاتی مانند «داشتن یا نداشتن A» را نیز مشمول این سورها می‌دانیم. در این صورت چنان‌که دیدیم، به آسانی می‌توانیم $\exists F\ Fx$ را به منزلهٔ قضیه اثبات کنیم. اکنون اگر بخواهیم این فرمول قضیه نباشد، ناگزیریم مقصود خویش از

سورهای $\forall F$ و $\exists F$ را به معقولات اولی و مفاهیم ماهوی محدود سازیم. در این صورت، فرمول $\exists F\ Fx$، دیگر قضیه نخواهد بود؛ زیرا برای نمونه، خداوند متعال، هیچ صفت ماهوی‌ای ندارد.

۱. نظام استنتاجی منطق هنکین

منطق مرتبهٔ دومی که سورهای خود را به معقولات اولی و ماهیات اختصاص می‌دهد، چگونه منطقی است؟ *لئون هنکین* (۱۹۲۱-۲۰۰۷) در سال ۱۹۵۰ منطق مرتبهٔ دومی معرفی کرده است که با آنچه ما می‌خواهیم مطابقت تام دارد و ما می‌توانیم این منطق را برای مقصود خود برگزینیم. قواعد این منطق، دقیقاً شبیه قواعد منطق مرتبهٔ اول‌اند؛ با این تفاوت که سورها روی محمول‌ها تغییر می‌کنند:

برای بیان این قواعد، X را متغیر محمولی n- موضعی، Y را محمول‌نشانهٔ n- موضعی، $A(X)$ را فرمولی شامل متغیر X و $A(X)$ را حاصل جایگزینی Y به جای همهٔ موارد X در $A(X)$ بگیرید. اکنون بیان قواعد:

حذف سور کلی

$$\frac{\forall X\ A(X)}{A(Y)}$$

معرفی سور کلی

$$\frac{A(Y)}{\exists X\ A(X)}$$

معرفی سور جزئی

$$\frac{A(Y)}{\forall X\ A(X)}$$

به شرط اینکه Y در فرض‌های باز و $A(X)$ مورد نداشته باشد

حذف سور جزئی

$$\begin{array}{l} \exists X\ A(X) \\ \left| \begin{array}{l} A(Y) \quad \text{فرض} \\ C \end{array} \right. \\ \therefore\ C \end{array}$$

به شرط اینکه Y در فرض‌های باز، C و $A(X)$ مورد نداشته باشد

تفاوت قواعد منطق مرتبهٔ دوم هنکین، با قواعد منطق مرتبهٔ دوم استاندارد این است که دو قاعدهٔ نخست در منطق مرتبهٔ دوم استاندارد به صورت زیر است: برای بیان این دو قاعده، X را متغیر محمولی n- موضعی، B را فرمولی با n متغیر آزاد محمولی، A(X) را فرمولی شامل متغیر X و A(Y) را حاصل جایگزینی B به جای همهٔ موارد X در A(X) بگیرید به طوری که این جایگزینی هیچ متغیر آزاد را پابند نکند. در این صورت داریم:

حذف سور کلی
$$\frac{\forall X\, A(X)}{A(B)}$$

معرفی سور جزئی
$$\frac{A(B)}{\exists X\, A(X)}$$

همان‌گونه که دیده می‌شود، در این دو قاعده به جای A(Y)، داریم: A(B). معنای این تفاوت چیست؟ برای بیان این تفاوت، ناگزیریم تفاوت Y و B را مورد ملاحظه قرار دهیم: در اینجا، حروف بزرگ آغازین الفبای لاتین را برای فرمول‌ها به کار برده‌ایم؛ در حالی که حروف بزرگ پایانی را برای متغیرهای محمولی.

با این قرارداد، در منطق هنکین، برای حذف سور کلی، به جای همهٔ موارد متغیر محمولی X، تنها می‌توانیم محمول‌نشانه (مانند Y) را قرار دهیم؛ امّا در منطق مرتبهٔ دوم استاندارد، هم می‌توانیم محمول‌نشانه (مانند Y) را قرار دهیم و هم می‌توانیم فرمول باز (مانند B) بگذاریم.

تفاوت محمول‌نشانه و فرمول باز این است که محمول‌نشانه، بسیط است و هیچ ادات منطقی‌ای در آن حضور ندارد؛ برخلاف فرمول باز که ممکن است در آن، ادات‌های منطقی حضور داشته باشد (این همان تفاوت مفاهیم ماهوی و معقولات اولی با مفاهیم انتزاعی و معقولات ثانیه است. بنابراین می‌توان گفت که منطق مرتبهٔ دوم هنکین، منطق معقولات اولی و منطق مرتبهٔ دوم استاندارد، منطق معقولات ثانیه است).

۲. سمانتیک منطق هنکین

پیش‌تر گفتیم که در سمانتیک استاندارد، به هر محمول‌نشانهٔ n ـ موضعی، زیرمجموعه‌ای دلخواه از توان nام دامنهٔ سخن را اسناد می‌دهند. در سمانتیک منطق هنکین، به هر محمول‌نشانهٔ n ـ موضعی، زیرمجموعه‌ای دلخواه از توان nام دامنهٔ سخن را اسناد می‌دهند؛ مشروط به اینکه آن زیرمجموعه، یکی از زیرمجموعه‌های برگزیده باشد. به عبارت دیگر، به هر محمول‌نشانهٔ n ـ موضعی، عضوی دلخواه از زیرمجموعه‌ای برگزیده از مجموعهٔ توانی توان nام دامنهٔ سخن را اسناد می‌دهند.

مقصود از این عبارت‌ها چیست؟ برای تسهیل در بیان مقصود، سخن خود را به محمول‌نشانه‌های یک موضعی محدود می‌کنیم. پس از درک اصل مطلب، می‌توان مسئله را به محمول‌های n ـ موضعی تعمیم داد.

در سمانتیک استاندارد، به هر محمول (یک‌موضعی) «زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ سخن» را اسناد می‌دادیم. در سمانتیک هنکین، در هر تعبیر، ابتدا، «زیرمجموعه‌هایی از دامنهٔ سخن» را برمی‌گزینیم و ثابت نگاه می‌داریم و آنگاه به هر محمول (یک‌موضعی)، یکی از آنها را نسبت می‌دهیم.

فرض کنید D دامنهٔ سخن باشد؛ می‌دانیم که هر زیرمجموعه از D عضوی از مجموعهٔ توانی D است (مجموعه توانی D را غالبا با $\mathcal{P}(D)$ نشان می‌دهند). بنابراین، در سمانتیک استاندارد، به هر محمول‌نشانهٔ یک‌موضعی، عضوی از $\mathcal{P}(D)$ را نسبت می‌دهیم، همانگونه که به هر نام، عضوی از D را نشان می‌دادیم. رابطهٔ محمول‌های یک‌موضعی نسبت به $\mathcal{P}(D)$ مانند رابطهٔ نام‌ها نسبت به خود D است. امّا در سمانتیک هنکین، این رابطه تغییر می‌کند. در این سمانتیک، در هر تعبیر، نخست زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{P}(D)$ برگزیده، و به هر محمول‌نشانهٔ یک‌موضعی، عضوی از آن نسبت داده می‌شود. بنابراین، در این سمانتیک، در هر تعبیر، رابطهٔ نام‌ها با D همانند رابطهٔ محمول‌نشانه‌ها با زیرمجموعه‌ای خاص از $\mathcal{P}(D)$ است. (توجه کنید که در تعبیرهای متفاوت، می‌توان زیرمجموعه‌های جداگانه‌ای را برگزید و احتمال برگزیدن مجموعهٔ تهی و یا حتی خود D نیز وجود دارد).

اکنون می‌توان دید که چرا قواعد استنتاجی هنکین معادل این سمانتیک است. می‌دانیم که هر فرمول باز با یک متغیر فردی آزاد، دربارهٔ بعضی (یا همه یا هیچ‌یک) از اعضای دامنه صادق و برای دیگر (یا هیچ یا همهٔ) اعضای دامنه کاذب است. اعضایی که یک فرمول باز را صادق می‌گردانند «مجموعهٔ صدق آن فرمول» نامیده می‌شوند. این مجموعه، آشکارا، زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ سخن است که احتمال دارد تهی یا ناتهی، و یا حتی معادل کل دامنهٔ سخن باشد.

اکنون، اگر $B(x)$ فرمولی با متغیر فردی x و مجموعهٔ صدقی مانند $\mathcal{B}$ (که زیرمجموعهٔ D است) باشد و داشته باشیم: $\forall X\ A(X)$، آنگاه فرمول اخیر در سمانتیک استاندارد به این معناست که همهٔ زیرمجموعه‌های D دارای حکم A هستند. در این صورت، $\mathcal{B}$ مشمول حکم A خواهد بود و بنابراین، خواهیم داشت: $A(B)$. اما فرمول $\forall X\ A(X)$ در سمانتیک هنکین، در تعبیری که زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{P}(D)$ مانند $\mathcal{Q}$ در آن انتخاب شده است، به این معناست که همهٔ اعضای $\mathcal{Q}$ دارای حکم A هستند؛ امّا احتمال دارد که مجموعهٔ $\mathcal{B}$ عضو $\mathcal{Q}$ و در نتیجه مشمول حکم A نباشد و بنابراین، نمی‌توان فرمول $A(B)$ را استنتاج کرد. این در حالی است که فرمول $A(X)$ قابل استنتاج است؛ زیرا به محمول‌نشانهٔ X یکی از اعضای $\mathcal{Q}$ نسبت داده شده و بنابراین، آن عضو مشمول حکم A است و بنابراین، فرمول $A(X)$ صادق است.

به همین صورت، می‌توان دربارهٔ قاعدهٔ معرفی سور جزئی سخن گفت. تعمیم بحث به محمول‌های چندموضعی نیز آسان است. کافی است همه‌جا به جای دامنهٔ سخن، یعنی D، توان nام دامنهٔ سخن، D^n را جایگزین کنیم.

۳. منطق هنکین و تعریف وجود

اکنون، به برهانی بازگردیم که تعریف وجود، یعنی فرمول $\exists F\ Fx$ را اثبات می‌کرد:

1. $Ax \vee \sim Ax$ معرفی قضیه
2. $\exists F\ Fx$ معرفی سور جزئی (۱)

آشکار است که قاعدهٔ معرفی سور جزئی که بر سطر اول اعمال شده و سطر دوم را نتیجه

داده، قاعده‌ای است در منطق مرتبهٔ دوم استاندارد و نه در منطق مرتبهٔ دوم هنکین؛ زیرا سطر ۱ حاصل جانشینی محمول‌نشانه به جای متغیر محمولی نیست، بلکه حاصل جانشینی فرمول باز به جای متغیر محمولی است.

تاکنون، نشان دادیم که برهان ارائه شده برای تعریف وجود، در منطق هنکین، برهان نیست؛ امّا این پرسش همچنان باقی است که آیا در منطق هنکین، برهان دیگری، هرچند بسیار پیچیده، برای این تعریف وجود ندارد؟ برای اثبات عدم وجود چنین برهانی، ناگزیریم تعبیری سمانتیکی ارائه کنیم که این تعریف در آن کاذب باشد. برای این کار، کافی است Q را مجموعهٔ تهی بگیریم؛ در این صورت، به x و F هر چه نسبت دهیم، Fx کاذب و بنابراین فرمول $\exists F\ Fx$ نیز کاذب خواهد شد.

اکنون، که تعریف وجود، $\exists F\ Fx$، در منطق هنکین، اثبات نمی‌شود و قضیهٔ آن نیست، می‌توانیم آن را آزادانه در تحلیل قضایای خارجی جایگزین $E!x$ کنیم و نگران فروکاهی آنها به قضایای حقیقیه نباشیم.

۴. قضایای منطق هنکین

قضایای منطق مرتبهٔ دوم هنکین، کاملاً مانند قواعد منطق مرتبهٔ اول است؛ جز اینکه سور روی محمول‌ها وارد شده است. بنابراین، کافی است به قضایایی از منطق مرتبهٔ دوم استاندارد توجه کنیم که در منطق هنکین، دیگر قضیه نیستند:

$\exists F\ Fx$	x صفتی دارد
$\forall x\ \exists F\ Fx$	هر چیزی صفتی دارد
$\exists F \sim Fx \rightarrow \exists F\ Fx$	اگر چیزی فاقد صفتی باشد، دارای صفتی است!
$\forall F \sim Fx \rightarrow \forall F\ Fx$	اگر چیزی فاقد هر صفتی باشد دارای هر صفتی است!
$\exists F \sim Fx \leftrightarrow \exists F\ Fx$	فقدان یک صفت، معادل داشتن یک صفت است!!
$\forall F \sim Fx \leftrightarrow \forall F\ Fx$	فقدان همهٔ صفات، معادل داشتن همهٔ صفات است!!
$Gxx \rightarrow \exists F\ Fx$	اگر چیزی با خود رابطه‌ای داشته باشد، دارای صفاتی است!
$Gxy \rightarrow \exists F\ Fx$	اگر چیزی با چیزی رابطه‌ای داشته باشد، دارای صفتی است!

کاذب بودن دو فرمول نخست، به دلیل قاعدهٔ فرعیه است؛ زیرا بنا به این قاعده، اشیای معدوم، هیچ صفتی ندارند. شاید قضیه بودن فرمول‌های بالا در منطق مرتبهٔ دوم استاندارد، به جز دو فرمول نخست، پیش پاافتاده به نظر برسد؛ زیرا تالیِ بیشترِ آنها قضیه است و بنا به تابع‌ارزشی بودن شرطی، آنها نیز قضیه خواهند بود. این سخن درست است؛ امّا توجه کنید که حتی اگر شرطی را شرطی ربطی در نظر بگیریم، دوباره خواهیم دید که این فرمول‌ها قضیه هستند و قضیه بودن آنها به سبب صدق تالی نیست؛ بلکه با اعمال قواعد منطق مرتبهٔ دوم استاندارد، می‌توان از مقدّم آنها به تالی رسید!

منطق هنکین و منطق حذف این‌همانی

پرسشی که اکنون خود را به ذهن تحمیل می‌کند، این است که دو منطق معرفی شده در این مقاله (منطق حذف این‌همانی و منطق هنکین) چه نسبتی با هم دارد؟ این پرسش، از این‌رو، رواست که نخست این دو منطق، برخلاف منطق این‌همانی استاندارد و منطق مرتبهٔ دوم استاندارد، قابلیت تعریف وجود و تفکیک قضایای حقیقیه و خارجیه را دارند؛ و دوم، در منطق مرتبهٔ دوم استاندارد، ادات این‌همانی تعریف‌پذیر است:

$$a=b \quad =_{\text{تع}} \quad \forall F\,(Fa \rightarrow Fb)$$

اگر این تعریف در منطق مرتبهٔ دوم هنکین نیز پذیرفته شود، خواهیم داشت:

$$a=a \quad =_{\text{تع}} \quad \forall F\,(Fa \rightarrow Fa)$$

و از آنجا که سمت راست تعریف اخیر، قضیه است، بنابراین، «a=a» نیز قضیه خواهد بود. در این صورت فرمول اخیر، معادل تعریف وجود در منطق هنکین، یعنی معادل $\exists F\, Fx$ نخواهد بود؛ زیرا تعریف وجود در منطق هنکین قضیه نیست؛ امّا از آنجا که a=a، در منطق حذف این‌همانی، معادل تعریف وجود است، نتیجه می‌گیریم که اگر تعریف این‌همانی در منطق هنکین پذیرفته شود، تعریفی که از وجود در منطق حذف این‌همانی داریم، دیگر در منطق هنکین، تعریف وجود نخواهد بود. بنابراین، در منطق هنکین، این سه تعریف (یعنی تعریف این‌همانی و

دو تعریف وجود) ناسازگارند و باید یکی از آنها را کنار نهاد. از اینجا می‌توان دریافت که این دو منطق، نمی‌توانند در طول یکدیگر باشند (مگر اینکه تعریف دیگری برای این‌همانی در منطق هنکین بیابیم).

فروکاستن قضایای حقیقیه و خارجیه به یکدیگر

تفکیک قضایای حقیقیه و خارجیه، تاکنون، در چهار منطق تحلیل شده است: ۱. منطق وجهی؛ ۲. منطق محمول‌ها و وجود؛ ۳. منطق حذف این‌همانی و ۴. منطق مرتبهٔ دوم هنکین. در اینجا شایسته است نحوهٔ فروکاهی قضایای حقیقیه و خارجیه را در هریک از این چهار منطق جداگانه بررسی، و سپس آنها را با هم مقایسه کنیم.

در میان منطق‌های وجهی، هریک از نظام‌های K، T، S4 و S5 نظام‌های پرطرفدارند و تفکیک قضایای حقیقیه و خارجیه در همهٔ آنها به یکسان برقرار است. با افزودن قاعدهٔ Triv به هریک از این نظام‌ها (یا افزودن قاعدهٔ Tc، عکس قاعدهٔ T، به سه نظام اخیر) سبب می‌شود که تفاوت میان $\Box A$، $\Diamond A$ و A از میان برود و در نتیجه، فرمول‌های قضایای حقیقیه و خارجیه معادل و هم‌ارز شوند.

در منطق محمول‌ها و وجود، افزودن هریک از $E!a$ و $\forall x\ E!x$ به منزلهٔ اصل موضوع، سبب می‌شود که فرمول $E!x$ قضیه شود و از ترکیب‌های عطفی و مقدّم شرطی در فرمول‌بندی قضایای خارجیه قابل حذف باشد. در این صورت، آشکار است که تفکیک میان قضایای حقیقیه و خارجیه از میان برداشته می‌شود.

در منطق حذف این‌همانی، افزودن هریک از $a=a$ و $\forall x\ x=x$ به منزلهٔ اصل موضوع، سبب می‌شود که فرمول $x=x$ قضیه گردد و از ترکیب‌های عطفی و مقدّم شرطی قابل حذف باشد. در این صورت، آشکار است که تفکیک میان قضایای حقیقیه و خارجیه از میان برداشته می‌شود.

در منطق مرتبهٔ دوم هنکین نیز افزودن قواعد منطق مرتبهٔ دوم استاندارد، سبب قضیه شدن تعریف وجود، $\exists F\ Fx$ و حذف آن از تحلیل قضایای خارجیه و فروکاهی آنها به قضایای خارجیه

می‌شود. افزودن اصل فراگیری (یا جامعیت) همین نقش را دارد. این اصل موضوع به صورت زیر است:[۵]
$\exists F\ \forall x\ (A(x) \leftrightarrow Fx)$

امّا توجه به این نکته بایسته است که برای فروکاهی، نیازی نیست که منطق هنکین را تا حد منطق استاندارد تقویت کنیم. افزودن $\exists F\ Fx$ یا $\forall x?\exists F\ Fx$ به منطق هنکین می‌تواند به فروکاهی بینجامد؛ بدون اینکه منطق استاندارد از آن نتیجه شود.

این نکات را در جدول زیر می‌توان جمع‌بندی کرد:

منطق‌ها	فرمول‌های فروکاهنده	
منطق وجهی	$A \rightarrow \Box A$	$A \leftrightarrow \Box A$
منطق محمول‌ها و وجود	$E!a$	$\forall x\ E!a$
منطق حذف این‌همانی	$a=a$	$\forall x\ x=x$
منطق مرتبهٔ دوم هنکین	$\exists F\ Fx$	$\forall x \exists F\ Fx$
منطق مرتبهٔ دوم هنکین		$\exists F\ \forall x\ (A(x) \leftrightarrow Fx)$

برای مقایسهٔ این چهار منطق، می‌توان به چند نکته اشاره کرد:

۱. نظام‌های کلاسیک و متداول در منطق وجهی (مانند نظام‌های K تا S5)، امکان تفکیک قضایای حقیقیه و خارجیه را فراهم می‌آورند؛ امّا نظام غیرکلاسیک و نامتداول Triv، تفکیک را نابود می‌سازد و به فروکاهی قضایای حقیقیه و خارجیه می‌انجامد. این در حالی است که در منطق‌های غیروجهی، نظام‌های استاندارد و متداول به فروکاهی می‌انجامند؛ امّا نظام‌های نااستاندارد توان تفکیک دو نوع قضایا را دارند.

۲. اصولاً تحلیل قضایای خارجیه و حقیقیه در منطق وجهی و تحلیل همان قضایا در سه منطق دیگر، متفاوت است. تحلیل قضایا در این سه منطق از ساختاری که در مقدّمهٔ این مقاله از مقالهٔ «تحلیل قضایای خارجیه با محمول وجود» نقل کردیم پیروی می‌کند.

۳. از میان این منطق‌ها، منطق محمول‌ها و وجود، در منطق حذف این‌همانی و منطق هنکین تعریف‌پذیر است؛ امّا این تعریف‌پذیری در جهت عکس و نیز در سایر منطق‌ها برقرار نیست.

نتیجه‌گیری

دیدیم که تفاوت میان قضایای حقیقیه و خارجیه را نه تنها می‌توان به‌کمک «منطق‌های وجهی» و «منطق محمول‌ها و وجود»، بلکه با «منطق محمول‌ها و حذف این‌همانی» و «منطق مرتبهٔ دوم هنکین» می‌توان نشان داد. منطق حذف این‌همانی، که از کنار گذاشتن قاعدهٔ معرفی این‌همانی از منطق محمول‌ها و این‌همانی به دست می‌آید، دارای دامنه‌ای شامل موجودات و معدومات است. مانع عمده در رسیدن به این منطق، بداهت فوق‌العادهٔ قاعدهٔ معرفی این‌همانی است که اجازهٔ عبور از آن را به ذهن نمی‌دهد. ما با توجه به قاعدهٔ فرعیه و اینکه گزاره‌های موجبه، به ویژه گزاره‌های این‌همانی، با معدوم بودن موضوع، کاذب‌اند، این مانع را پشت سر گذاشتیم.

منطق مرتبهٔ دوم هنکین نیز از تضعیف دو قاعده از قواعد سور در منطق مرتبهٔ دوم استاندارد به دست می‌آید. این منطق، برخلاف منطق حذف این‌همانی، پیش‌تر شناسایی شده و مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. به نظر می‌رسد که مانع اصلی در توجه به این منطق برای تفکیک قضایای حقیقیه و خارجیه، شهرت بیش از حد منطق مرتبهٔ دوم استاندارد بوده است (تا حدی که در ادبیات منطق مرتبهٔ دوم، منطق هنکین را تنها به صورت یک منطق فرعی و کم‌اهمیت مورد بحث قرار داده‌اند).

مانع دیگر در توجه به این منطق در تفکیک قضایای حقیقیه و خارجیه، عدم توجه به قضیه بودن تعریف وجود ($\exists F\ Fx$) در منطق استاندارد و قضیه نبودن آن در منطق هنکین بوده است. هم‌زمان با درک نکتهٔ اخیر، امکان عبور از این مانع نیز برای نگارنده فراهم آمد.

پی‌نوشت‌ها

۱ـ اسدالله فلاحی، «صورت‌بندی جدیدی از قضایای حقیقیه و خارجیه»، ***آینهٔ معرفت***، ش ۱۱، ص ۵۲.

۲ـ اسدالله فلاحی، «تحلیل قضایای خارجیه با محمول وجود»، ***معرفت فلسفی***، ش ۲۳، ص ۷۱.

۳ـ همان، ص ۵۷.

۴ـ برای توضیح بیشتر دربارهٔ دو نظام منطق مرتبهٔ دوم استاندارد و هنکین، ر.ک: محمّد اردشیر، ***منطق ریاضی***، ص ۱۸۹ـ۲۰۵؛ علیرضا دارابی، ***بررسی نحوی و معنایی منطق درجهٔ دوم***، ص ۳۴ـ۳۸ و ۵۰ـ۵۹؛ سید محمّدعلی حجتی و علیرضا دارابی، «بررسی و مقایسهٔ دو دلالت‌شناسی منطق مرتبهٔ دوم»، ***مطالعات و پژوهش‌ها***، ش ۵۱، ص ۷۵ـ۷۷.

۵ـ محمّد اردشیر، همان، ص ۱۹۶.

منابع

ـ اردشیر، محمّد، ***منطق ریاضی***، تهران، هرمس، ۱۳۸۳.

ـ حجّتی، سید محمّدعلی و علیرضا دارابی، «بررسی و مقایسهٔ دو دلالت‌شناسی منطق مرتبهٔ دوم»، ***مطالعات و پژوهش‌ها***، ش ۵۱، ۱۳۸۶، ص ۶۹ـ۸۴.

ـ دارابی، علیرضا، ***بررسی نحوی و معنایی منطق درجهٔ دوم***، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد، رشتهٔ فلسفه، تهران، دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۸۴.

ـ فلاحی، اسدالله، «صورت‌بند جدیدی از قضایای حقیقیه و خارجیه»، ***آینه معرفت***، ش ۱۱، تابستان ۱۳۸۶، ص ۳۰ـ۶۱.

ـ ـــــ ، «صورت‌بندی قضایای خارجیه با محمول وجود»، ***معرفت فلسفی***، ش ۲۳، بهار ۱۳۸۸، ص ۵۱ـ۷۶.

- Henkin, Leon, "Completeness in the Theory of Types", ***The Journal of Symbolic Logic***, 15, 1950, p. 81-91.